

532
Б-30

Издание Наземъ Вспомогательн. Студентовъ С.П.Б. Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.

Проф. Б. А. БАХМЕТЕВЪ.

ГИДРАВЛИКА.

Часть I.

С.-Петербургъ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1913.

1632

532
8-30
Издание Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПб. Политехническаго Института

Императора Петра Великаго.

п
у
Морев
Б. А. БАХМЕТЕВЪ.

1632 59
Проверено
1966 г.
Гидравлика.

(Общій курсъ).

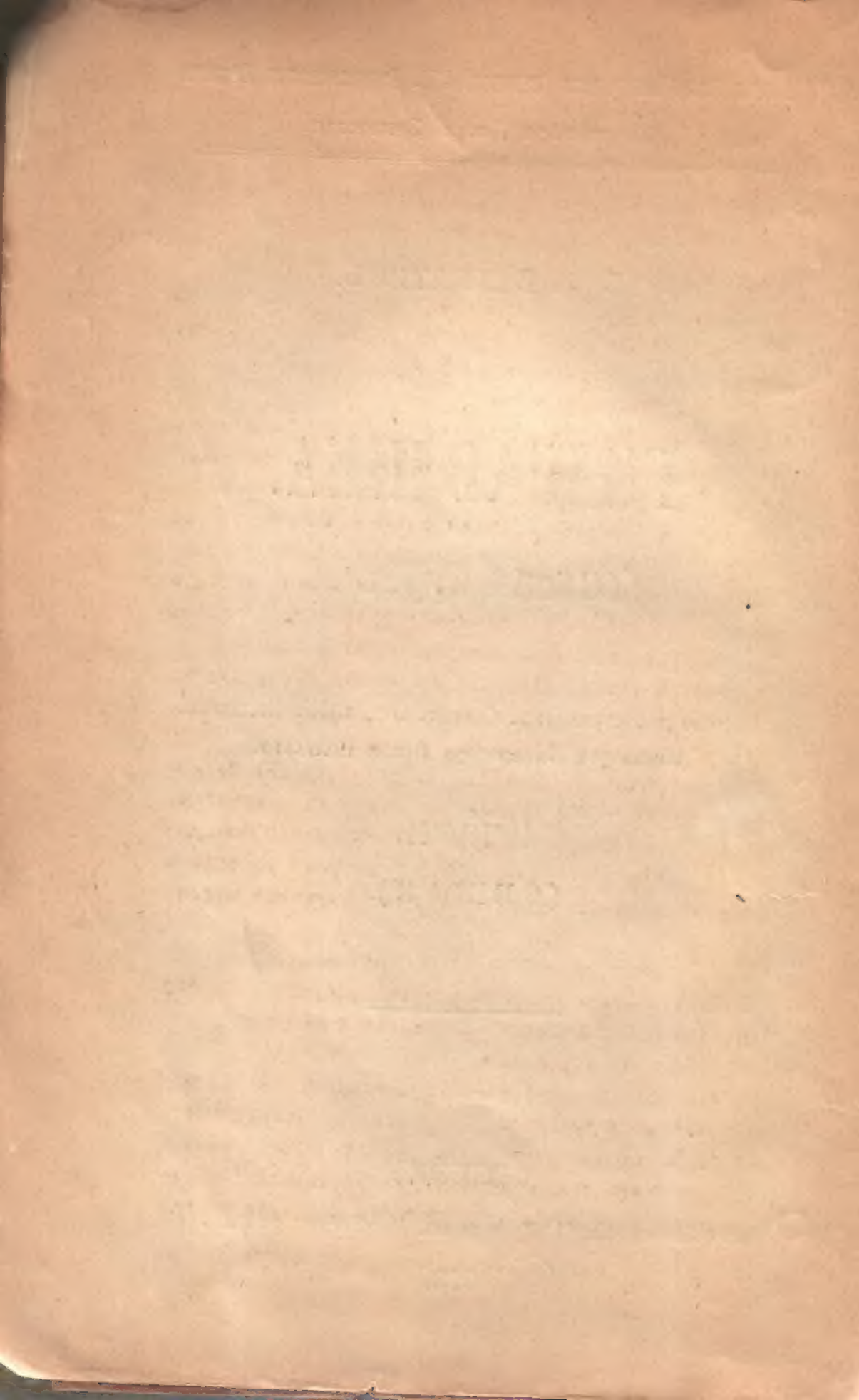
Пособіе для студ. Инж. Строит. Отд. СПб. Политехн.
Института Императора Петра Великаго.

с/а
✓
I часть
(ОБЩАЯ).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1913.



О Г Л А В Л Е Н І Е .

Страница.

Предисловіе 3

Общее:

1) Гидравлика; 2) Идеальная жидкость; 3) Реальная жидкость; 4) Гидродинамика и гидравлика . . . 5 - 10

Глава I - Гидростатика.

5) Гидростатическое давление; 6) Гидростат. давл. для покоящейся тяжелой жидкости; 7) Пьезометрическое давление; 8-9) Общія уравненія гидростатики; 10) Законъ Паскаля; 11) Разысканіе давленія въ частныхъ случаяхъ; 12) Опрежденіе полного давленія на погруженную въ тяжелую жидкость плоскую фигуру; 13) Центр давленія; 14) Графическіе приемы определенія центра давленія; 15-16) Опрежденіе величины и центра давленія на кривую поверхность; 17) Машины дѣйствующія давленіемъ воды . . . 11 - 36

Глава II - О движеніи жидкости вообще.

18) О струйчатомъ движеніи жидкости; 19) Терминологія; 20 - 22) Уравненіе Бернулли; примѣры; 23) Введеніе сопротивленій; 24) Уравненіе Бернулли для пѣлаго потока; 25) Основное уравненіе неустановившагося одноразмѣрнаго движенія жидкости . . . 37 - 62

Глава III - Основныя уравненія Гидродинамики.

26) Гидродинамическое уравненіе Эйлера; 27) Случай "безвихревого" движенія идеальной жидкости . . . 63 - 72

Глава IV - О сопротивленіяхъ.

28) Два рода движенія вязкой жидкости; 29) Сопротивленія въ струйчатомъ движеніи; 30) Сопротивленія въ беспорядочномъ движеніи; 31) Общее выраженіе для учета сопротивленій въ прямолинейномъ равномерномъ установившемся движеніи жидкости; 32)

Видъ $\frac{F(\alpha)}{\gamma}$ выражающій величину сопротивленій въ

беспорядочномъ движеніи; 33) Показательная форму- ла; 34) Выраженіе внутренняго тренія въ беспо- рядочномъ движеніи по Boussinesq'у; 35) Потери на "ударъ"; 36) Мѣстныя потери; 37) Практическія приложенія ур-нія Бернулли; 38) Сопротивленіе въ сходящемся и расходящемся потокѣ; 39) Сопро- тивленія въ неравномѣрномъ медленно измѣняющем- ся движеніи; 40) Случай неуставовившагося дви- женія	73 - 135
---	----------

П р е д и с л о в і е .

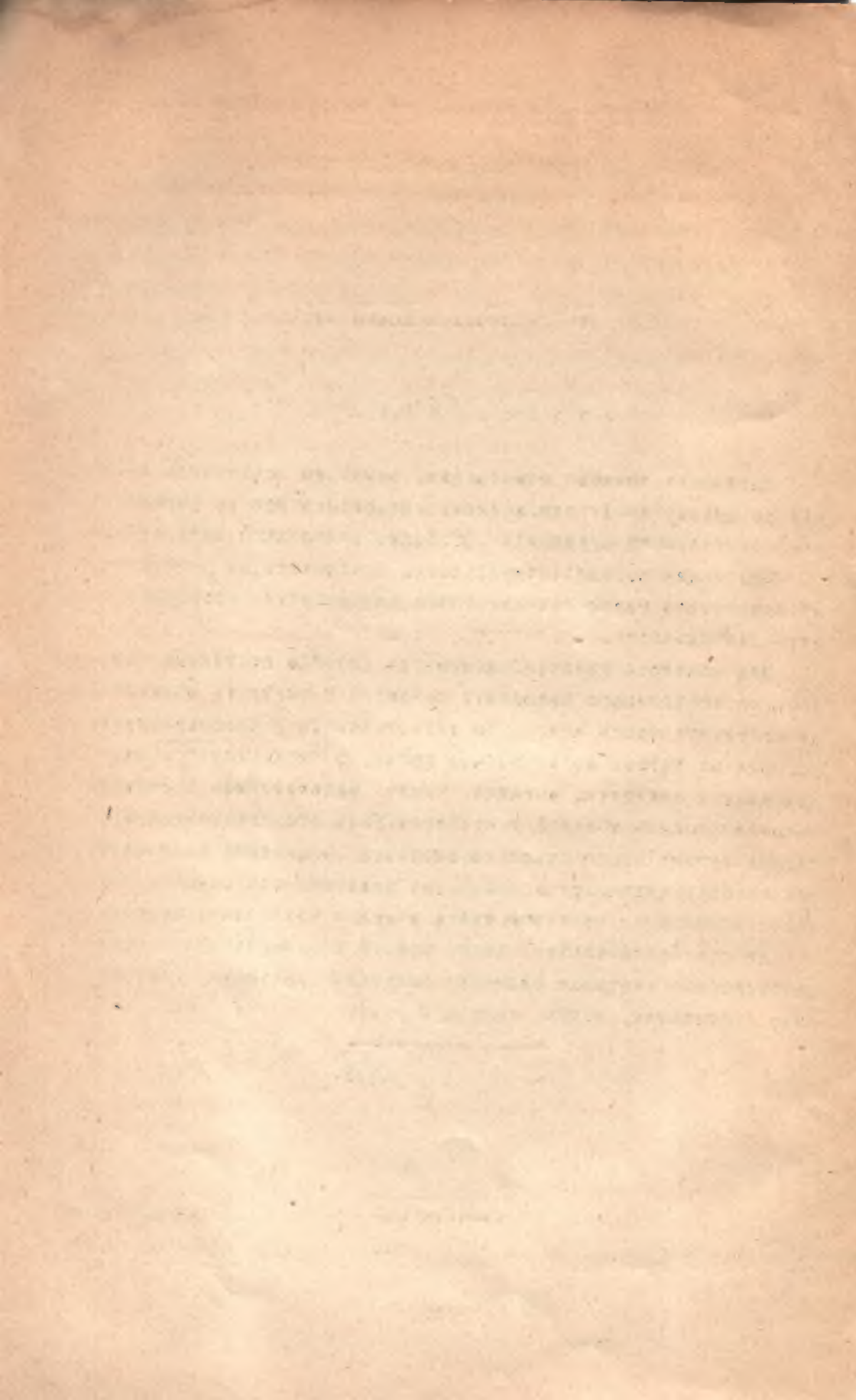
Настоящее пособие охватывает примѣрно содержаніе лекцій по общему курсу гидравлики, читаемому мною на Инженерно-Строительномъ отдѣленіи С.П.Б. Политехническаго Института.

Настоящая первая (общая) часть заключаетъ въ себѣ, кромѣ элементовъ гидростатики, общее разсмотрѣніе вопросовъ о движеніи жидкости.

Мнѣ казалось цѣлесообразнымъ въ пособіи отступить отъ порядка лекціоннаго изложенія предмета и выдѣлить цѣликомъ въ отдѣльную часть изложеніе тѣхъ свѣдѣній и представленій, которыя мы имѣемъ въ настоящее время, о "механизмѣ" движенія вязкой жидкости, а также общее разсмотрѣніе и оцѣнку гидравлическихъ моделей и методовъ. Намъ представляется, что такимъ путемъ всего лучше достигается правильное пониманіе относительно цѣнности и предѣловъ примѣнимости орудій, которыя прикладная механика даетъ въ руки практика-инженера.

Вторая (спеціальная) часть будетъ посвящена подробному разсмотрѣнію частныхъ случаевъ движенія жидкости (отверстія, водоопливы, трубы, каналы и пр.).

В.В.



О Б Щ Е Е.

1. *Гидравлика* является отдѣломъ прикладной механики, занимающимся изученіемъ движенія и покоя жидкостей. Жидкимъ называется состояніе вещества, характеризующееся почти неограниченной подвижностью частицъ и почти полнымъ отсутствіемъ сопротивленія разрыву или измѣненію формы тѣла.

Необходимо различать состоянія: а) Капельно-жидкое и б) Газообразное.

Капельно-жидкимъ называется состояніе, отличающееся почти полной несжимаемостью (а слѣдовательно, значительной объемной упругостью) тѣла и весьма малой температурной его расширяемостью; тѣмъ самымъ плотность капельно жидкого яла остается почти неизмѣнной (постоянной), не завися отъ давленія и температуры.

Наоборотъ, газообразное состояніе характеризуется весьма значительной сжимаемостью и сравнительно большимъ коэффициентомъ температурнаго расширения. Плотность газа тѣмъ самымъ измѣняется въ широкихъ предѣлахъ, вмѣстѣ съ давленіемъ и температурой.

Въ послѣдующемъ мы будемъ имѣть въ виду лишь капельно-жидкія тѣла, или жидкости въ болѣе тѣсномъ смыслѣ слова.

Наши выводы могутъ быть распространяемы на газы только въ тѣхъ случаяхъ, когда, въ предѣлахъ рассматриваемаго явленія, измѣненія температуры и давленія столь незначительны, что ими можно пренебрегать и считать, опять таки въ предѣлахъ рассматриваемаго явленія, плотность газа постоянной.

Гидравлика, въ болѣе тѣсномъ смыслѣ слова, занимается рассмотрѣніемъ вопросовъ движенія и покоя именно капельно-жидкихъ тѣлъ.

Изученіе обстоятельствъ движенія и покоя газовъ входитъ въ составъ термодинамики.

2. Идеальная жидкость.

При рассмотрѣніи различныхъ вопросовъ, касающихся покоя и движенія жидкостей, весьма важное значеніе имѣетъ понятіе

объ "идеальной жидкости" или объ "идеально-жидкомъ тѣлѣ".

Эта "модель" играетъ въ гидромеханикѣ такую же роль, какую въ статикѣ и динамикѣ играетъ модель абсолютно твердаго тѣла или модель идеально упругаго тѣла въ теоріи упругости.

1) Мы будемъ считать идеальную жидкость абсолютно несжимаемой и нерасширяющейся отъ температуры. Такимъ образомъ, плотность идеальной жидкости постоянна; упругость ея бесконечно велика; коэффициентъ температурнаго расширения - нуль.

2) Идеальная жидкость абсолютно подвижна; она не оказываетъ никакого сопротивленія разрыву или измѣненію формъ.

Изъ послѣдняго опредѣленія само собою слѣдуетъ, что внутри идеальной жидкости не могутъ существовать ни *растягивающія*, ни *сжимающія* напряженія. Очевидно, что сила взаимодействія, которая единственно можетъ существовать внутри идеальной жидкости по нѣкоторой площадкѣ, должна быть направлена по нормали къ этой площадкѣ внутрь; такимъ образомъ, единственные напряженія, которыя могутъ существовать въ идеально-жидкомъ тѣлѣ суть напряженія сжимающія.

3. Реальная жидкости.

Посмотримъ, насколько "модель идеальной жидкости" отличается отъ свойствъ реальной жидкости.

Сжимаемость: Въ нижеслѣдующей таблицѣ I*) приведены (по Amagat) коэффициенты объемной сжимаемости β (умноженные на 10^4) для воды и алкоголя при обыкновенныхъ температурахъ. Коэффициентомъ объемной сжимаемости называется коэффициентъ β опредѣляемый изъ формулы

$$\frac{dv}{v} = -\beta dp$$

и выражающій относительное измѣненіе объема жидкости при увеличеніи давленія на одну атмосферу.

Т а б л и ц а I.

Давленіе въ атмосф.	1-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
Вода	47,5	41,6	35,8	32,4	29,2	26,1
Алкоголь	76,9	56,6	45,8	38,5	33,1	28,4

*) Все данныя заимствованы изъ "Физики" Льюисона.

Такимъ образомъ для воды при обыкновенной температурѣ коэффициентъ объемнаго сжатія 0,0000475 или $\approx 1/21000$.

Что касается измѣненія сжимаемости съ температурой, то согласно опытамъ Amagat сжимаемость при малыхъ давленіяхъ сперва уменьшается съ возрастаніемъ температуры до 50°, далѣе вѣсколько увеличивается.

Температурное расширеніе.

Коэффициенты температурнаго расширенія ($\frac{dv}{v} = \alpha dt$) для воды по Amagat при различныхъ температурахъ и давленіяхъ приведены въ таблицѣ II. (Въ таблицѣ приведены значенія α умноженныя на 10°).

Т а б л и ц а II.

Давленія	Т е м п е р а т у р ы				
	0 - 10	10 - 20	40 - 50	60 - 70	80 - 100
1	14	150	422	556	719
100	43	165	422	548	
200	72	183	426	539	
500	149	236	429	523	661
900	229	289	437	514	621

Какъ видно изъ таблицы коэффициентъ температурнаго расширенія для воды увеличивается съ увеличеніемъ давленія. Для большинства жидкостей наоборотъ, коэффициентъ α съ увеличеніемъ давленія уменьшается. Температура наибольшей плотности воды понижается съ увеличеніемъ давленія. При нормальномъ (атмосферномъ) давленіи температура наибольшей плотности 4° C; при $p = 41.6 \text{ atm.}$, $t = 3.3^\circ$; при $p = 93.3 \text{ atm.}$, $t = 2^\circ$; при $p = 144.8 \text{ atm.}$, $t = 0.6^\circ$.

Плотность.

Измѣненіе плотности воды при атмосферномъ давленіи въ зависимости отъ температуры. Таблица III.

t	Плотность	t	Плотность	t	Плотность	t	Плотность
0	0.999874	20	0.998235	50	0.99813	80	0.97191
4	1.000000	30	0.996674	60	0.98331	90	0.96550
10	0.999731	40	0.99333	70	0.97780	99	0.95934
						100	0.95863

Изъ приведенныхъ выше данныхъ слѣдуетъ, что въ предѣлахъ встрѣчающихся въ практикѣ измѣненій температуръ и давленій, плотность реальной жидкости колеблется весьма мало, и что обычно, принимая эту плотность постоянной, мы дѣлаемъ весьма малую ошибку, ошибку относительно значительно меньшую, чѣмъ обычная точность гидравлическихъ вычисленій.

Въ некоторыхъ частныхъ случаяхъ намъ придется считать-ся какъ съ упругостью, такъ и съ температурной расширяемостью жидкостей. Для рѣшенія соответственныхъ вопросовъ можно пользоваться данными приведенныхъ выше таблицъ.

Силы, дѣйствующія внутри жидкости.

Въ идеальной жидкости мы допустили существованіе лишь сжимающихъ напряженій. На самомъ дѣлѣ въ реальной жидкости имѣютъ мѣсто какъ растягивающія, такъ и касательныя напряженія.

Растягивающія усилія появляются въ видѣ силъ сцепленія, являющихся результатомъ молекулярнаго притяженія между частицами.

Вопросы о проявленіяхъ этихъ силъ рассматриваются обычно въ курсахъ физики въ отдѣлѣ о частичныхъ силахъ. (Теорія капиллярности).

Извѣстно, что эти силы проявляются лишь на границахъ однородныхъ жидкихъ массъ (на поверхностяхъ соприкосновенія разнородныхъ жидкостей или жидкости съ твердымъ тѣломъ). Внутри же жидкости конечныхъ размѣровъ дѣйствіе силъ сцепленія сводится къ нулю.

Такимъ образомъ капиллярныя силы приходится принимать во вниманіе лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда объемные размѣры рассматриваемаго жидкаго тѣла малы по сравненію съ его поверхностью, какъ напр., при движеніи въ капиллярныхъ трубкахъ и пр. Въ обычныхъ же случаяхъ ими вовсе можно пренебрегать.

Касательныя напряженія.

Наоборотъ, касательныя напряженія, проявляющіяся внутри жидкости достигаютъ значительной величины и пренебрегать ими во многихъ случаяхъ отнюдь нельзя. Касательныя усилія проявляются между частями жидкости при скользяніи одной по другой; такимъ образомъ ихъ дѣйствіе подобно тренію; усилія эти потому и называются "внутреннимъ треніемъ"; свой-

ство реальной жидкости обладает таковыми называют: "вязкость"; реальную жидкость поэтому, в противоположность идеальной, называют "вязкой" жидкостью. При движении реальной жидкости силы вязкости совершают обратную работу; движение реальной жидкости сопровождается в силу этого, вообще говоря, рассеянием энергии. Как мы увидим ниже, отдел гидравлики посвящен исключительно количественной оценке работы сил сопротивления. Немудрено поэтому, что изучение внутреннего трения составляет одну из самых главных задач гидравлики.

Согласно опыту, силы внутреннего трения зависят от скорости скольжения частиц между собой. Из этого следует крайне важное обстоятельство, именно то, что при покое жидкости, когда скорости скольжения равны нулю, силы внутреннего трения отсутствуют.

4. Гидродинамика и Гидравлика.

Отдел теоретической механики, занимающийся изучением движения жидких тел, называется "гидродинамикой". Гидродинамика преимущественно занимается рассмотрением движения идеально жидких тел.

Общие уравнения движения даже для случая идеальной жидкости не могут быть проинтегрированы в общей вид. Тем не менее в ряде частных случаев они интегрируются и дают крайне важные обобщения, которые, как мы увидим ниже, в некоторых случаях применимы и к движению реальных жидкостей.

Уравнения движения для вязких жидкостей представляются еще более сложными и могут быть проинтегрированы лишь в самом небольшом числе частных случаев.

Гидравлика, как и другие отделы прикладной механики, в основе своей опирается на физику, понимая последнее в самом широком смысле, включая физику как опытную, так и математическую (основой которой является теоретическая механика).

В этом смысле в основе гидравлики лежит гидродинамика. Но так как последняя не может дать ответа на все вопросы движения вязкой жидкости, то гидравлик, как и другие отделы прикладной механики, приходится применять свои собственные методы, помощью которых можно было бы решать, хотя

бы и неполно и несовершенно, вопросы движенья жидкостей и давать отвѣты на вопросы, предъявляемые инженерной практикой.

Прогрессъ гидравлики, равно какъ и другихъ отдѣловъ прикладного знанія, заключается въ постепенной замѣнѣ такихъ временныхъ, приближительныхъ рѣшеній рѣшеніями болѣе точными, основанными непосредственно на методахъ математической физики.

Г л а в а I.

Г И Д Р О С Т А Т И К А .

Отдѣлъ гидравлики, занимающійся изученіемъ равновѣсія и покоя жидкости, называется *гидростатикой*.

Какъ мы видѣли выше, въ случаяхъ покоя жидкости силы вязкости отсутствуютъ. Слѣдовательно, находящаяся въ равновѣсіи масса реальной жидкости конечныхъ размѣровъ (чтобы можно было пренебрегать явленіями капиллярности), находится въ условіяхъ, совершенно близкихъ къ идеальной жидкости. Тѣмъ самымъ задачи равновѣсія жидкостей могутъ быть рѣшаемы съ большою точностью.

Гидравликѣ нѣтъ надобности вырабатывать собственныхъ приемовъ, поэтому въ этой области различія между гидравликой и гидродинамикой не существуютъ.

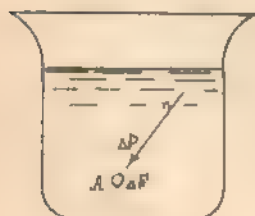
5. Гидростатическое давленіе.

Въ силу вышеуказаннаго внутри жидкости, находящейся въ равновѣсіи, существуютъ лишь сжимающія напряженія.

Въ точкѣ А, находящейся внутри жидкости, (фиг. 1) представимъ себѣ безконечно малую площадку ΔF . На эту площадку будетъ дѣйствовать сила ΔP по нормали n внутрь. Предѣлъ величины

$$\lim \left| \frac{\Delta P}{\Delta F} \right|_{\Delta F \rightarrow 0} = p$$

фиг. 1.



этой силы, отнесенной къ единицѣ площади, при уменьшеніи послѣдней до нуля, назовемъ давленіемъ въ точкѣ А по направленію n . ("Давленіе", очевидно, тождественно съ "сжимающимъ напряженіемъ").

Легко показать, что давленіе въ данной точкѣ не зависитъ отъ направленія, т.е. скалярное для

всѣхъ безконечно малыхъ площадокъ, проведенныхъ въ точкѣ А, какъ бы послѣднія ни были ориентированы.

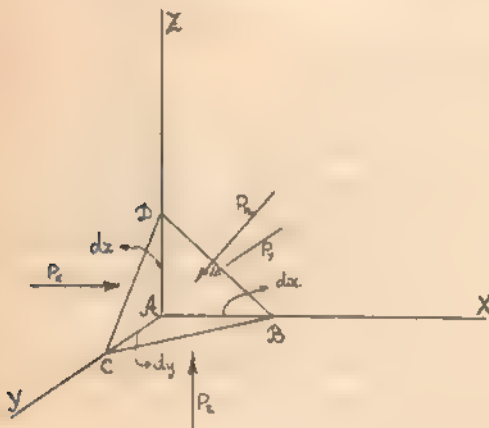
Для доказательства этого достаточно рассмотреть равновѣсіе силъ, приложенныхъ къ элементарному тетраэдру $ABCD$, съ безконечно малыми сторонами dx, dy, dz ; въ виду малости площадокъ, можно пренебрегать, какъ величиной высшаго порядка малости, измененіемъ давленія въ предѣлахъ площадокъ и считать его по всей площадкѣ одинаковымъ.

Такимъ образомъ, величины силъ, дѣйствующихъ на стороны тетраэдра выразятся послѣдовательно черезъ:

$$\frac{1}{2}p_y dy dz, \frac{1}{2}p_x dx dz; \frac{1}{2}p_z dx dy; p_n \Gamma_n . . . (a)$$

гдѣ p_x, p_y, p_z и p_n изображаютъ давленія въ направленіяхъ x, y, z и n — нормали къ площадѣ BCD , площадь которой равна Γ_n .

фиг. 2.



Кромѣ внѣшнихъ силъ — давленій, на массу, находящуюся внутри тетраэдра, дѣйствуютъ еще лишь, такъ называемыя, объемныя силы, пропорціональны массѣ (тяжести, притяженія и т.п.). Ихъ величины по нѣкоторому направленію N выражаются черезъ:

$$\frac{1}{6} dx dy dz \varrho R_n . . (b)$$

гдѣ $\frac{1}{6} dx dy dz$ — объемъ тетраэдра, ϱ масса единицы объема, а R_n величина объемной силы, дѣйствующей по направленію n на единицу массы.

Величина объема тетраэдра, входящая въ выраженіе (b), является величиной безконечно малой высшаго порядка по сравненію съ поверхностями граней, на которыя умножаются давленія въ выраженіи (a). Поэтому дѣйствіемъ объемныхъ силъ можно пренебрегать.

Назвая l, m, n cosinus'ы угловъ, составляемыхъ нормалью N съ осями координатъ и приравнивая нулю проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на тетраэдръ, имѣемъ:

$$\frac{1}{2} p_x dx dy - F_n p_n l = 0.$$

$$\frac{1}{2} p_y dx dz - F_n p_n m = 0$$

$$\frac{1}{2} p_z dx dy - F_n p_n n = 0.$$

Но такъ какъ въ свою очередь

$$\frac{1}{2} dy dz = l F_n$$

$$\frac{1}{2} dx dz = m F_n$$

$$\frac{1}{2} dx dy = n F_n$$

то, очевидно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p$$

Слѣдовательно, напряженное состояніе въ точкѣ А характеризуется одинаковымъ по всѣмъ направленіямъ давленіемъ p . Эллипсоидъ напряженій представляется въ видѣ шара. Давленіе p называють гидростатическимъ давленіемъ въ точкѣ А. Измѣряють его обычно въ киллогр. на кв. сантиметръ или атмосферахъ, въ тоннахъ на кв. метръ и т.д.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что напряженное состояніе въ каждой точкѣ вполне опредѣленно характеризуется одной величиной "гидростатическаго давленія", которое, на основаніи всего вышесказаннаго, зависитъ лишь отъ мѣстоположенія точки, т. е. является лишь функцией координатъ точки.

6. Гидростатическое давленіе для покоящейся тяжелой жидкости.

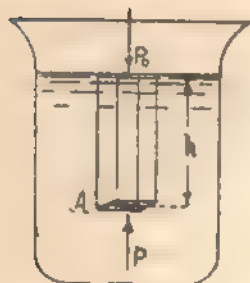
Въ некоторыхъ частныхъ случаяхъ величину гидростатическаго давленія можно опредѣлять путемъ самыхъ элементарныхъ разсужденій; таковымъ, напримѣръ, является случай покоящейся тяжелой жидкости, т. е. жидкости подверженной лишь силамъ тяжести. Пусть въ точкѣ А (фиг. 3) проведена горизонтальная площадка \mathcal{M} , вертикальное разстояніе которой до уровня сво-

бодной поверхности жидкости h .

Построим вертикальный цилиндр, проводя вертикальные образующие через контур насадки. Спроектируем силы, действующие на цилиндр, на ось параллельную силе тяжести. Сумма проекций всех давлений на боковую поверхность цилиндра, очевидно, равна нулю. Давление на основание цилиндра снизу $dF \cdot p$, где p гидростатическое давление в точке А. Уравнение равновесия:

$$dF \cdot p = dF p_0 + dF \gamma h$$

Фиг. 3.



где p_0 давление на свободную поверхность жидкости, а γ вес единицы объема ее.

Таким образом, гидростатическое давление

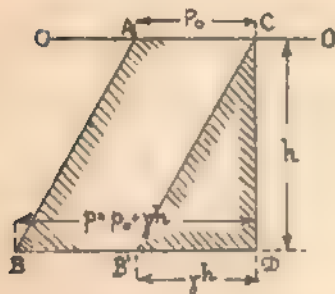
$$p = p_0 + \gamma h \quad (1)$$

равно давлению на свободной поверхности, сложенной с весом столба жидкости, основание кото-

рого единица, а высота равна глубине погружения точки А под свободной поверхностью жидкости.

Выражение (1) весьма просто поддается графической интерпретации.

Фиг. 4.



На фиг. 4 О - О свободная поверхность жидкости.

Гидростатическое давление внутри ее изображается трапецией $ABCD$, левая ордината которой BD (равная $p = p_0 + \gamma h$) изображает величину давления в точке D на глубине $CD = h$.

Весьма часто желательно знать, так называемое, избыточное давление ($p_m = p - p_0$) от веса жидкости, не принимая во

внимание давления на свободную поверхность.

График избыточного давления, очевидно, представляется в виде треугольника BCD . $BD = \gamma h$ изображает величину из-

быточнаго давленія въ точкѣ D на глубинѣ h .

Графическое изображеніе давленій находитъ самое широкое примѣненіе при ршеніи практическихъ задачъ.

Опредѣлимъ теперь, какъ выражается для воды величина γh въ различныхъ мѣрахъ.

а) *Въ метрическихъ.*

Если p желательнo получить въ $\frac{\text{килогр.}}{\text{сантм.}^2}$ или атмосферахъ, то за единицу мѣръ надлежитъ принять, очевидно, килограммъ и сантиметръ. γ (вѣсъ въ килограммахъ одного куб. сант.) равенъ 0.001.

Такимъ образомъ,

$$p_m = p - p_0 = \gamma h = 0,001h \quad (*)$$

Давленіе возрастаетъ на каждый сантиметръ погруженія на 0.001 атмосферы; каждый линній метръ погруженія даетъ, очевидно, 0,1 килгр. давленія. Давленіе въ 1 $\frac{\text{килогр.}}{\text{сантм.}^2}$ или въ одну атмосферу соотвѣтствуетъ 10 метрамъ погруженія.

б) Если принять за единицу мѣръ метрическую тонну (1000 килгр.) и метръ, то давленіе въ тоннахъ на квадр. метръ выразится, принимая во вниманіе, что γ (вѣсъ въ тоннахъ одного куб. метра) равенъ 1 т.:

$$p_m = p - p_0 = 1 \cdot h \quad (**)$$

такъ, что каждый метръ погруженія даетъ давленіе въ одну тонну на кв. метръ.

Если имѣть дѣло съ какой либо другой жидкостью, удѣльный вѣсъ которой, по сравненію съ водой γ_1 , то выраженіе (*) и (**) надо умножить на γ_1 . Такъ, напримѣръ, гидростатическое избыточное давленіе въ бакѣ съ нефтью, удѣльнаго вѣса 0,91, на глубинѣ 10 метровъ отъ свободной поверхности составляетъ, очевидно, $0,91 \frac{\text{килгр.}}{\text{см}^2}$ или $9,1 \frac{\text{тн.}}{\text{м}^2}$.

Русскія мѣры.

Пуды и футы	$p_m = 1.73h$
Пуды и сажени	$p_m = 593h$
Фунты и футы	$p_m = 69h$

7. *Ассиметрическое давленіе.*

Мы выше видѣли, что въ случаѣ тяжелой жидкости давленіе

выражается въсомъ столба жидкости. Такъ, напримѣръ, оказалось, что давленію въ одну метрическую атмосферу ($1 \frac{\text{кгм}}{\text{см}^2}$) соотвѣтствуетъ столбъ воды висотой въ 10 метровъ и пр.; вообще

$$p = \gamma h \quad \text{и} \quad h = \frac{p}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Очевидно, величину давленія вмѣсто обычной мѣры $\frac{\text{сила}}{\text{ед. площ.}}$

можно просто характеризовать соотвѣтствующей высотой столба жидкости. Такъ, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы говорить: давленіе въ 3,5 атмосферы, можно сказать: давленіе въ 35 метровъ водяного столба.

Выраженіе величины давленія высотой столба жидкости очень употребительно въ физикѣ и техникѣ. Такъ, напримѣръ, давленіе воздуха обычно измѣряютъ въ мм. ртутнаго столба; давленія и разрѣженія, производимыя воздуходувными машинами и вентиляторами въ мм. водяного столба. Въ гидравликѣ давленія большей частью выражаются въ метрахъ водяного столба, причѣмъ величина избыточнаго давленія

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p - p_0}{\gamma}$$

выраженная высотой столба жидкости носитъ названіе пьезометрическаго давленія или пьезометрической высоты.

Изъ формулъ (2) само собой явилъ способъ перехода отъ пьезометрическихъ давленій къ обычнымъ. Напомнимъ лишь еще разъ, что величины p , γ и h должны выражаться въ одинаковыхъ мѣрахъ, т.е. надо впередъ остановиться на опредѣленной единицѣ длины и всѣа и выразить въ нихъ всѣ величины p , γ , h .

Несоблюденіе этого крайне элементарнаго правила часто приводитъ къ грубымъ ошибкамъ.

8. Общія уравненія гидростатики.

Въ предыдущемъ мы посредствомъ элементарныхъ соображеній нашли распредѣленіе гидростатическаго давленія въ случаѣ покоящейся тяжелой жидкости.

Расширимъ теперь постановку вопроса. Поставимъ, именно, общій вопросъ слѣдующимъ образомъ:

"Найдемъ общія условія равновѣсія жидкаго тѣла и при

заданной системы сил найдемъ распределение давления внутри его".

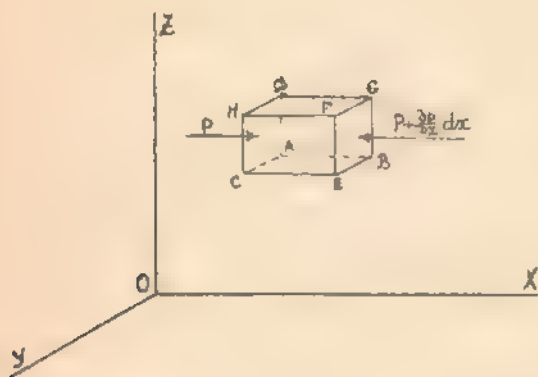
Вышеуказанную постановку вопроса можно характеризовать, какъ основную и общую задачу гидростатики. Въ окончательной формѣ отвѣтъ на вопросъ далъ Эйлеръ*). До него вопросомъ занимались Newton, Huyghens, Clairault.

Видѣлимъ въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи у точки A (ф. 5) элементарный параллелепипедъ со сторонами, параллельными осямъ координатъ dx, dy, dz .

Среднее давление на площадки, нормальныя къ осямъ координатъ и проходящія черезъ точку A ($ACHD, ABCE, ABEC$) будутъ отличаться отъ давления p въ точкѣ A на величину без-

фиг. 5.

конечно малую. Этими различіями пренебрежемъ**). Давления на площадки $EFG, CHFE, DHFG$ будутъ соответственно равны



$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Массу единицы объема жидкости обозначимъ $\rho = \frac{M}{V}$; объемную силу, действующую на единицу массы, Q ; проекціи ея на оси координатъ соответственно q_x, q_y, q_z . Приложенныя къ выдѣленному элементу жидкости силы находятся въ равновѣсіи; имѣемъ, следовательно, для оси x :

$$p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz + q_x \rho dx dy dz = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x} = q_x \rho$$

*) Histoire de l'Académie de Berlin, 1755.

**) Более точный выводъ съ принятіемъ во вниманіе этихъ силъ см. Саженичъ "Гидромеханика".

Составляя подобныя же уравненія для другихъ осей, получаемъ систему уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= q_x \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= q_y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= q_z \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и вообще, если n любое направленіе,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = q_n$$

гдѣ q_n проекція объемной силы, дѣйствующей на единицу массы, на направленіе n . Уравненія (3) и составляютъ общія дифференціальныя уравненія равновѣсія жидкости, въ томъ видѣ, какъ даны Эйлеромъ. Умножая уравненія послѣдовательно на dx, dy, dz и складывая, получаемъ:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = q_x dx + q_y dy + q_z dz \quad (4)$$

Какъ мы выше указали, въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи, гидростатическое давленіе является функціей однихъ координатъ. Выраженіе, стоящее въ скобкахъ на лѣвой сторонѣ есть поэтому полный дифференціалъ; уравненіе (4), слѣдовательно, можно переписать въ видѣ

$$\frac{1}{\rho} dp = q_x dx + q_y dy + q_z dz \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Чтобы уравненіе (4') имѣло смыслъ, нужно прежде всего, чтобы и правая часть этого уравненія (4') являлась полнымъ дифференціаломъ некоторой функціи U , т.е.

$$q_x dx + q_y dy + q_z dz = dU$$

что, очевидно, требуетъ, чтобы

$$q_x = \frac{\partial U}{\partial x} ; \quad q_y = \frac{\partial U}{\partial y} ; \quad q_z = \frac{\partial U}{\partial z} . \quad . \quad . \quad (5)$$

Другими словами, система объемныхъ силъ, дѣйствующихъ на жидкость, должна имѣть потенціалъ. Функція U является такъ называемой *скалярной функціей*.

Далѣ, для интегрированія уравненія необходимо, чтобы масса единицы объема ρ была либо постоянной, либо функцией лишь одного давленія p .

Такимъ образомъ, общія условія, при которыхъ возможно равновѣсіе жидкости вообще, являются слѣдующія:

1) Дѣйствующія объемныя силы должны имѣть потенціалъ; т. е. должна существовать функція U , зависящая лишь отъ координатъ, частныя производныя которой по любому направленію равны проекціямъ на это направленіе объемной силы, дѣйствующей на единицу массы.

2) плотность жидкости должна зависеть лишь отъ давленія.

При невыполненіи этихъ условій жидкость вообще въ равновѣсіи находиться не можетъ.

Эти общія условія были полностью сформулированы еще Clairault въ его знаменитомъ сочиненіи "О фигурѣ земли" (1743). Разысканіе фигуры геоида привело его къ постановкѣ и разрѣшенію общаго вопроса о равновѣсіи жидкаго тѣла*). Исследования Clairault послужили также основой теоріи потенціала.

Намъ довольно трудно представить себѣ жидкость, которая подѣ дѣйствіемъ системы силъ не могла бы прійти въ равновѣсіе и находилась бы, по выраженію Эйлера, въ состояніи "постояннаго волненія" (agitation continuelle). Но трудность такого представленія, по замѣчанію Эйлера, является лишь слѣдствіемъ того, что объемныя силы, дѣйствіе которыхъ мы привыкли наблюдать, воѣ имѣютъ потенціалъ и мы не имѣемъ опыта въ наблюденіи противнаго.

9. Вернемся теперь къ нашимъ уравненіямъ.

Для капельной жидкости плотность постоянна. Перепишемъ (4'), принимая во вниманіе (5)

$$dp = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \rho dU$$

Интегрируя получаемъ:

$$p = C + \rho \cdot U \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

*) Интересныя свѣдѣнія историческаго характера см. Маси. Меморіик стр. 428.

или

$$p - p_0 = \rho(U - U_0) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Уравненія (6) и (7) свидѣтельствуютъ о томъ, что распределение давленія въ жидкости, находящейся въ равновѣсїи, въ точности копируетъ распределение силовой функціи.

Тѣмъ самымъ общія свойства силовой функціи, изучаемыя въ теоріи потенціала, характеризуютъ также и распределение давленій.

Поверхности уровня или поверхности равнаго потенціала являются въ то же время поверхностями равнаго давленія. Уравненіе такой поверхности

$$dU = 0$$

или

$$dp = 0$$

Свободная поверхность жидкости, какъ поверхность равнаго давленія, является, очевидно, поверхностью уровня. Равнодѣйствующая объемныхъ силъ перпендикулярна къ поверхности уровня. Ея величина равна

$$\rho g_n = \rho \frac{dU}{dn}$$

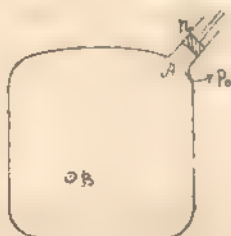
10. Законъ Паскаля.

Уравненіе (7) показываетъ также, что разность давленій между двумя точками есть умноженная на плотность разность силовой функціи для двухъ этихъ точекъ.

Изъ этого слѣдуетъ важное обобщеніе известное подъ именемъ закона Паскаля. Рассмотримъ два сосуда (фиг. 6 а и 6 б).

фиг. 6 а.

фиг. 6 б.



Второй совершененъ, а первый не-
вполнѣ, напол-
ненъ жидкостью;
въ первомъ имѣ-
ется свободная
поверхность CD.
Во второмъ въ
точкѣ А устро-
ены поршенькъ
и N. На жидкость

дѣйствуетъ некоторая система силъ, удовлетворяющая общимъ условиямъ равновѣсія. Напишемъ уравненіе (7) въ формѣ

$$p = p_0 + \rho(U - U_0) \quad (7bis)$$

Величину p_0 и U_0 будемъ относить къ точкѣ А, находящейся въ первомъ сосудѣ на свободной поверхности, во второмъ сосудѣ у поршня. Величина $\rho(U - U_0)$ зависитъ лишь отъ системы объемныхъ силъ и не зависитъ отъ величины давленія p_0 въ точкѣ А. Отсюда ясно, что, измѣняя произвольно на некоторую величину давленіе p_0 въ верхней свободной полости перваго сосуда или подъ поршнемъ въ второмъ, мы на ту же величину будемъ измѣнять давленіе въ любой точкѣ жидкости.

Это и служитъ доказательствомъ закона Паскаля, согласно которому, давленіе, приложенное къ свободной поверхности жидкости, или къ любой точкѣ на поверхности жидкости замкнутой въ сосудѣ, равномерно передается во все точки жидкости. Законъ этотъ также весьма просто доказывается помощью начала возможныхъ перемѣненій.

11. Разысканіе давленія въ частныхъ случаяхъ.

Для нахожденія распределенія давленія, какъ мы видѣли выше, достаточно найти силовую функцію системы силъ, дѣйствующихъ на жидкость. Для этой цѣли необходимо лишь составить дифференціальное уравненіе

$$dU = q_x dx + q_y dy + q_z dz$$

и проинтегрировать его.

Всего лучше объяснить это разборомъ ряда частныхъ случаевъ.

1. Тяжелая покоящаяся жидкость (фиг. 3). Единственная объемная сила есть сила земного притяженія. Предположимъ ось Z ось направленной вертикально внизъ. Тогда сила q_z , отнесенная къ единицѣ массы, постоянна и равна γ .

$$dp = \rho q dz = \frac{\gamma}{g} \rho dz = \gamma dz$$

Назначая начало координатъ на свободной поверхности, гдѣ давленіе p_0 , имеемъ

$$p - p_0 = \gamma z$$

т.е. уравненіе (1).

Поверхности равнаго давленія характеризуются $z = \text{const}$; т.е. представляются въ видѣ горизонтальныхъ плоскостей.

II. Найдемъ распределеіе давленія въ тяжелой жидкости, равномерно вращающейся въ открытомъ сверху сосудѣ съ угловой скоростью ω . Если движеніе установилось, то жидкость находится въ покой относительно сосуда, и можно применить уравненіе равновѣсія, если къ дѣйствующимъ силамъ присоединить еще силы инерціи, вызванныя вращательнымъ движеніемъ. Движеніе симметрично относительно оси; поэтому достаточно рассмотреть любую меридіональную плоскость. Беремъ начало координатъ на оси на свободной поверхности жидкости. Ось Z^0 вертикально вниз; за другую координату беремъ радіусъ r .

Сила инерціи есть центральная сила. Величина ея q_r , дѣйствующая на единицу массъ, очевидно

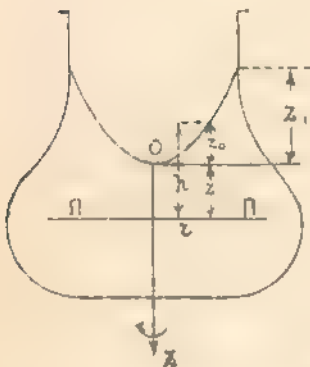
$$q_r = \omega^2 r$$

$$dp = \rho(\omega^2 r dr + g dz) = \frac{\rho}{2} \omega^2 dr^2 + \rho g dz$$

интегрируя, получаемъ:

$$p = c + \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + \rho g z \quad (8)$$

фиг. 7.



Опредѣляемъ C изъ условія, что въ началѣ координатъ давленіе равно давленію на свободной поверхности p_0 ; имѣемъ

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + \rho g z \quad (9)$$

Уравненіе свободной поверхности $p = p_0$ въ рассматриваемомъ меридіональномъ сѣченіи напишется:

$$z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = 0$$

Свободная поверхность является, следовательно, параболоидомъ вращенія. Величина превышенія любой точки свободной поверхности надъ началомъ координатъ (z_0)

$$z_0 = - \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (10)$$

Поверхности равного давления:

$$z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \text{Const}$$

т.е. также параболоиды вращения.

Найдем распределение давления вдоль горизонтальной плоскости $\Pi - \Pi$, координата которой z .

В уравнении (9) считаем z постоянным. Подставляя вместо того же z уравнения (10) значение z_0 , имеем:

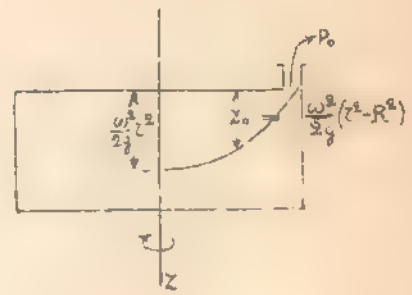
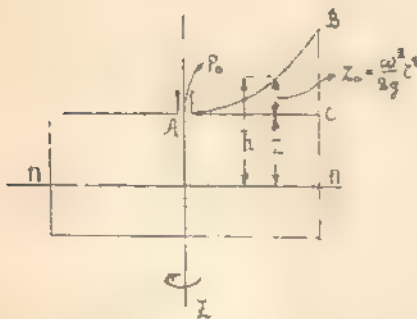
$$p - p_0 = \gamma \left(z - \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) = \gamma (z - z_0) = \gamma h$$

Таким образом, давление соответствует столбу жидкости, равному расстоянию от плоскости $\Pi - \Pi$ до свободной поверхности жидкости.

Замкнутый сосуд. Очевидно, распределение давлений выражалось бы совершенно также, если бы сосуд был замкнутым (фиг. 8 и 9) и был бы совершенно заполнен жидкостью. Рассмотрим лишь в определении постоянной. В случае, изображен-

фиг. 8.

фиг. 9.



ном на фиг. 8, предполагается, что возле оси, в точке А в крышке сосуда сделано отверстие; благодаря этому во все время движения в точке А поддерживается давление равно p_0 . Распределение давления целиком совпадает с (9). Давление по плоскости $\Pi - \Pi$ выражается высотой столба жидкости

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

В фиг. 9 предполагается, что отверстие в крышке сделано

на наружномъ край въ точкѣ С. Очевидно, во время движенія давленія въ С также будетъ равно p_0 .

Въ этомъ случаѣ, для опредѣленія постоянной въ уравненіи (8), имѣемъ:

$$p_0 = \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{2} R^2 + C$$

Подставляя, получимъ

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) + \gamma z$$

Давленіе непосредственно подъ крышкой ($z = 0$) будетъ меньше наружнаго. Жидкость подъ крышкой будетъ въ состояніи разрѣженія. Если принять, что p_0 есть атмосферное давленіе, то величина $p_0 - p$ изображаетъ избытокъ атмосфернаго давленія надъ давленіемъ p . Этотъ избытокъ, измѣряющій степень разрѣженія, называется вакуумомъ.

Вакуумъ, очевидно, можно выразить различнымъ образомъ. Его можно выразить, подобно давленію p , въ видѣ давленія на единицу поверхности, или высотѣ водяного столба, или, наконецъ, въ процентахъ отъ атмосфернаго давленія и пр.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, если говорить, что вакуумъ, напримѣръ въ конденсаторѣ паровой турбины, составляетъ 90%, это значитъ, что давленіе въ конденсаторѣ ниже атмосфернаго на 0,9 атмосферъ, т.е. составляетъ лишь 0,1 атм. или $\frac{c \cdot 1 \times 10^4}{\text{атм}^2}$ и пр.

Наибольшій вакуумъ, очевидно, будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ А; его величина равна

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{2} R^2$$

Давленіе въ точкѣ А

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{2} R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Очевидно, что съ увеличеніемъ скорости вращенія величина давленія p уменьшается (и вакуумъ соответственно увеличивается). Однако, уменьшенію p по самой сути вещей положенъ предѣлъ. Въ силу сдѣленія жидкости между частицами могутъ существовать лишь сжимающія напряжения. Отсюда слѣдуетъ, что абсолютная величина давленія p не можетъ быть отрицательной. Жидкость, въ случаѣ пониженія p ниже нуля, пре-

терпит разрыв, теряет непрерывность, т. е. свойство полностью без пустот заполнять пространство. Очевидно, при этом уже физически невозможно равновесие. Жидкость будет выливаться через отверстие C ; внутри же будут образовываться пустоты.

Определим величину предельной угловой скорости ω_k , при которой давление в A падает до нуля. Из (11), очевидно, что

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2g\rho_0}{\gamma}} \cdot \frac{1}{R} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (12)$$

Примѣръ: если $R = 0,5$ метра; $\rho_0 = 1$ атмосфера;

$\frac{\rho_0}{\gamma} = 10$ метровъ водяного столба; $\sqrt{2g} = 4.43$, то:

$$\omega_k = \frac{4.43}{0.5} \sqrt{10} = \approx 28$$

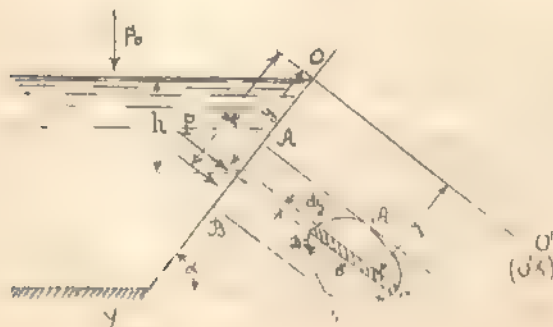
что соответствуетъ около 288 об./мин.

На самомъ дѣлѣ, благодаря тому, что въ жидкости обично заключаются растворенный воздухъ и газы, послѣдніе выйдутъ съ пониженіемъ давления начнутъ энергично выдвигаться и жидкость начнетъ вытекать черезъ отверстие много раньше, чѣмъ будетъ достигнута предельная скорость, получаемая изъ уравненія (12).

12. Определение полного давления на погруженную въ тяжёлую жидкость плоскую фигуру.

На фиг. 10 ось OY представляетъ сечение фигуры плоскостью чертежа. Ось X — ось полагаемъ совпадающей со свободной горизонтальной поверхностью жидкости. Въ правой части чертежа

фиг. 10.



фигура $ABCD$ изображена повернутой вокругъ оси OY и совмѣщенной съ плоскостью чертежа. Ось OX при этомъ заняла положеніе OO' . Видѣлимъ на фигурѣ полосу высотъ

dy , шириной b , параллельную оси OX . Давление по всей такой полоске одинаково. Площадь ее $dF = b dy$.

Полное давление на полоску:

$$\Delta p = (\gamma h + p_0) dF = p_0 dF + \gamma dF y \sin \alpha$$

где h глубина погружения полоски, α угол наклона плоскости фигуры к горизонту.

Полное давление на всю фигуру определяется, как сумма давлений на отдельные полоски

$$P = \int_F p_0 dF + \int_F \gamma y \sin \alpha dF$$

где значек F у интеграла показывает, что интегрирование необходимо распространить на всю поверхность фигуры.

Очевидно

$$P = p_0 F + \gamma \sin \alpha \int_F y_0 dF = F(p_0 + \gamma h_0) \quad (13)$$

где y_0 и h_0 координата и соответствующая глубина погружения центра тяжести фигуры.

Но $p_0 + \gamma h_0$ есть ничто иное, как гидростатическое давление в центре тяжести фигуры. Отсюда получаем правило:

"Полное давление жидкости на погруженную плоскую фигуру равно произведению площади фигуры на величину гидростатического давления в ее центре тяжести".

13. Центр давления.

Определим теперь еще точку приложения равнодействующей всех давлений P или, так называемый, центр давления.

Найдем отдельно точку приложения равнодействующей избыточных давлений p_m . Очевидно, точка приложения равнодействующей давлений p_0 совпадает с центром тяжести фигуры. Составим уравнение моментов вокруг оси OX

Момент избыточных давлений, действующих на элементарную площадку:

$$\Delta M = \gamma \sin \alpha y^2 dF$$

Момент соответственной равнодействующей, называя y_c координату центра давлений,

Очевидно

$$M = F y \sin \alpha y_0 y_0 = \int y \sin \alpha y^2 dF$$

$$M = F y \sin \alpha y_0 y_0 = \int y \sin \alpha y^2 dF$$

$$F y \sin \alpha y_0 y_0 = y \sin \alpha J_0$$

или

откуда

$$y_c = \frac{J_0}{F y_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

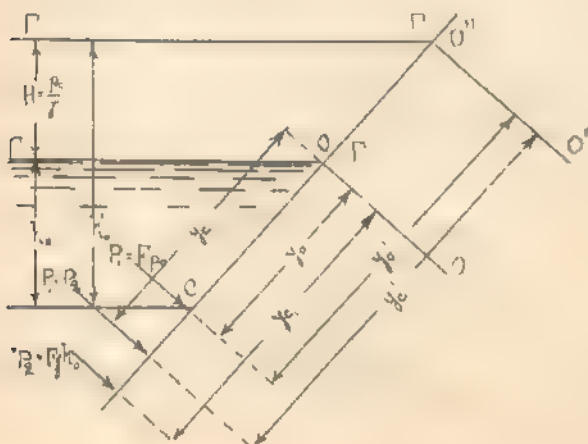
т. е. координата центра давления равна отношению момента инерции фигуры, относительно линии пересечения свободной поверхности съ плоскою фигурою, къ статическому моменту фигура относительно той же оси. Называя J_0 и J_c радиусы инерции фигуры относительно оси OO' и параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести, имеем:

$$y_c = \frac{F J_0}{F y_0} = \frac{y_0^2 - J_c^2}{y_0} = y_0 + \frac{J_c^2}{y_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14^*)$$

Такимъ образомъ, центръ давления всегда ниже центра тяжести фигуръ; расстояние между ними (по координатѣ y) равно $\frac{J_c^2}{y_0}$ отношенію квадрата радиуса инерции относительно горизонтальной оси, проходящей черезъ центръ тяжести, къ расстоянію до центра тяжести. Замѣтимъ, что координата центра давления (14*) есть приведенная длина физическаго маятника.

Зная величины и точки приложенія двухъ частныхъ равнодѣйствующихъ нетрудно опредѣлять координату y_c точки приложенія полной равнодѣйствующей.

фиг. 11.



Въ приложеніяхъ, однако, обычно приходится опредѣлять лишь точку приложенія равнодѣйствующей нѣсколькихъ давленій P_m

Замѣтимъ лишь, что координата точки приложенія под-

ного давления будет выражаться формулой, подобной (14) или (14*), если только за ось абсцисс взять ось $O''O'$ - линию пересечения плоскости фигуры с горизонтальной поверхностью $\Gamma \Gamma'$ находящейся выше свободной поверхности жидкости $\Gamma \Gamma'$ на высоту $H = \frac{p_0}{\gamma}$, представляющую собой пьезометрическую высоту, соответствующую давлению p_0 на свободной поверхности. Очевидно, считая глубину от этой поверхности, мы имеем давление в любой точке

$$p = p_0 + \gamma h_0 = \gamma (H + h_0) = \gamma h.$$

Полное давление

$$P = F \gamma h_0.$$

Ясно, что

$$h_0 = \frac{y}{\gamma \rho}$$

и т.д.

14. Графические приемы определения центра давления.

Во многих случаях практики предпочтительно при определении центра давления пользоваться графическими приемами.

Пусть, например, требуется определить избыточное давление воды на вертикальный водоудержательный щит, перегораживающий прямоугольный канал шириной $b = 2$ м. глубиной $h_0 = 2.5$ м.; величина давления определяется, как произведение площади щита на давление в центре тяжести.

Площадь щита $F = bh_0$; давление в центре тяжести $p = \frac{1}{2} \gamma h_0$.

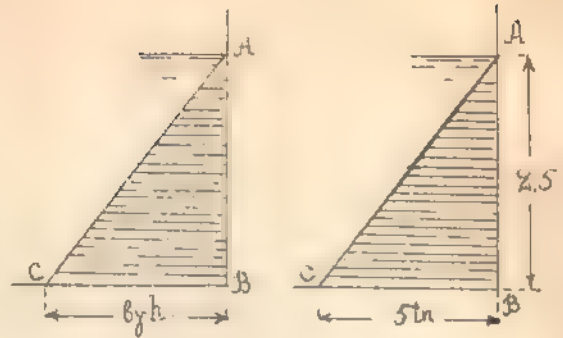
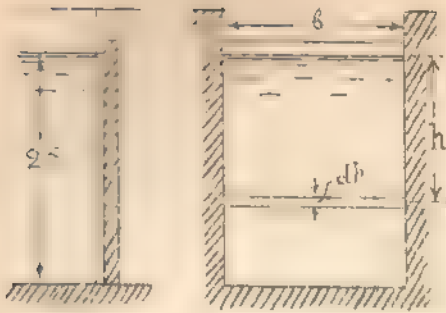
$$P_m = \frac{b}{2} \gamma h_0^2 = 6.25 \text{ тонны}$$

Для нахождения центра давления рассуждаем следующим образом: так как ширина щита всюду одинакова, то давление на элементарную полоску высотой dh , при ширине щита b , выражается через $\gamma b h dh$. Диаграмма давлений на полоску щита высотой единицу выражается, очевидно, как выше в случае стр. 13 треугольником $\triangle ABC$ (черт. 13 а), ордината которого γh . (Для рассматриваемого конкретного случая диаграмма изображена на черт. 13 б).

Площадь треугольника в соответствующем масштабе изображает величину равнодействующей ($\frac{25 \times 5}{2} = 62.5$); точка ее приложения совпадает, очевидно, с центром тяжести треуголь-

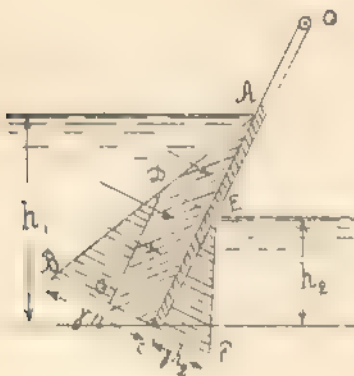
Фиг. 12.

Фиг. 12а и 12б.



ника, т.е. находится на трети высоты. Весь труда станет ясным теперь построение приведенное на ф. 14, изображающее построение центра избыточного давления на наклонный щит OC , перегородивший прямоугольный канал, в котором вода стоит с обеих сторон щита*).

Фиг. 14.



перегородивший прямоугольный канал, в котором вода стоит с обеих сторон щита*). Очевидно, треугольник ABC изображает диаграмму давления с верхней стороны, треугольник CFE с нижней стороны щита.

Результирующей диаграммой будет фигура $ADCC$; равнодействующая будет проходить через ее центр тяжести.

15. Определение величины и центра давления на кривую поверхность.

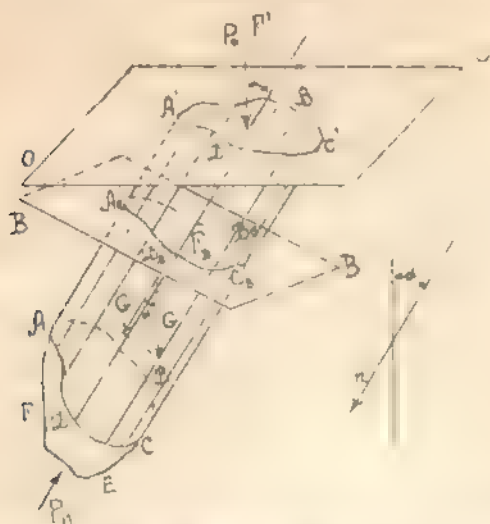
Так как величина и направление полного давления вполне определяется по трем любым, не лежащим в одной плоскости составляющим, то для решения вопроса достаточно решить следующую задачу: определить составляющую полного давления по какомунибудь направлению N .

Пусть (на фиг. 15) возьмем криволинейную поверхность $ABCDE$.

*) На черт. приведено несколько оселков на единицу ширины щита.

Через контур ее $ABCD$ проведем цилиндрическую поверхность, параллельную направлению n ; цилиндрическая поверхность пересечет свободную поверхность по контуру $A'B'C'D'$, вырезав фигуру площадью F' . Для определения искомой составляющей давления P_n рассмотрим условия равновесия жидкого тела, ограниченного поверхностью $ABCD E F$, цилиндрической поверхностью и плоскостью $A'B'C'D'$.

Фиг. 15.

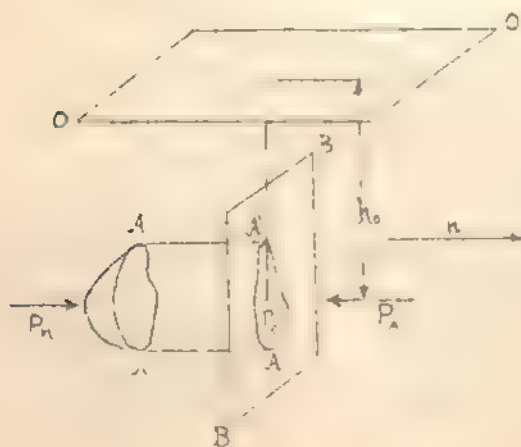


Если весь жидкости, находящейся внутри этого тела, G и α угол, составляемый направлением n с вертикаль, то проектируя действующие силы на направление n , имеем:

$$P_n = G \cos \alpha + P_0 F' \cos \alpha \quad (1)$$

Итак все дело свелось к определению объема отсеченного тела и площади F' . Бить надобности обязательно добиваться пересечения цилиндрической поверхности свободной поверхностью жидкости. Достаточно пересечь ее любой плоскостью $F B$ и найти площадь фигура $A'B'C'D'$. В уравнении равновесия (1),

Фиг. 16.



очевидно, в этом случае второй член $P_0 F' \cos \alpha$ займется бы $P_{B(n)}$, т.е. проекцией на n давления на плоскую фигуру $(A'B'C'D')_B$, которое определится в основном уравнении (13).

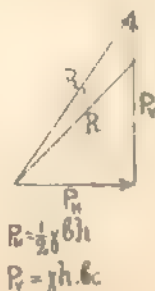
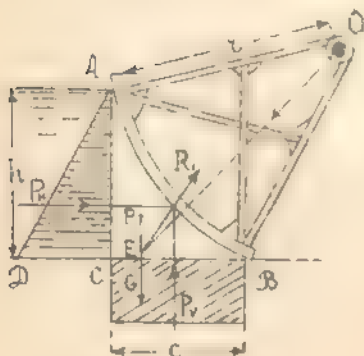
Определим, напрямом, горизонтальную составляющую P_H на фигуру AA' (фиг. 16). Через контур фигуры проводим цилиндрическую поверхность (образующая горизонтальна) и пересѣкаемъ ее вертикальной, перпендикулярной къ направлению n , плоскостью BB' . Такъ какъ составляющая въса на это направление равна нулю, то, очевидно, горизонтальная составляющая давления равна гидростатическому давленію $P_d = \gamma \cdot h \cdot F$ на вырѣзанную цилиндрической поверхностью фигуру $A'A'$.

Очевидно, рѣшеніе и при другомъ направленіи n ничѣмъ не отличалось бы отъ только что полученнаго, если бы вѣсомъ отсѣченнаго тѣла можно было бы пренебрегать по сравненію съ давленіемъ на вырѣзанную площадку. Въ этомъ случаѣ также составляющая давленія по направленію n просто была бы равна давленію на проекцію криволинейной поверхности на плоскость, перпендикулярную къ тому направленію n . Въ практикѣ обычно рѣшеніе задачи во многихъ случаяхъ можно еще нѣсколько упростить. Рѣшимъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

1. Опредѣлимъ давленіе на цилиндрической сегментный затворъ, перегораживающій прямоугольный каналъ шириной b метр. и глубиной h метр. Поверхность затвора есть поверхность круговаго цилиндра радіуса r съ горизонтальной осью OO , около которой вращается затворъ подвѣшенный на шарнирѣ (фиг. 17).

Для рѣшенія задачи рассмотримъ равновѣсіе отсѣка ACB , ограниченаго съ одной стороны цилиндрической поверхностью дуги AB , съ другой двухъ горизонтальной и вертикальной площадкой ACB и $A'B'$. На отсѣкъ кромѣ вѣса G , приложеннаго въ центр тяжести E , дѣйствуютъ давленія на AC и CB — P_H и P_V и,

фиг. 17.



наконецъ, реакція дуги (обратная по направленію вѣсому давленію воды на дугу R). Для нахождения последней прежде всего найдемъ равнодѣйствующую R давленій P_H и P_V . Продолжаемъ ее до пересѣченія съ направленіемъ

емъ вѣса отсѣка \bar{z} (самой величины вѣса \bar{z} знать нѣтъ необходимости) проходящимъ черезъ центръ тяжести F . Черезъ точку пересѣченія E , очевидно, и должно проходить искомое давленіе R .

Такъ какъ всѣ элементы поверхности перпендикулярны къ радіусамъ, то всѣ элементарныя давленія проходятъ черезъ центръ O ; очевидно, что черезъ эту же точку проходитъ также и равнодѣйствующая всѣхъ давленій R .

Соединяемъ E съ O линія EO есть направленіе равнодѣйствующей. Зная направленіе послѣдней и величину горизонтальной составляющей $P_H = \frac{1}{2} \rho \gamma h^2$ находимъ построениемъ (на отдѣльномъ чертежѣ сбоку) величину полного давленія и его вертикальной составляющей.

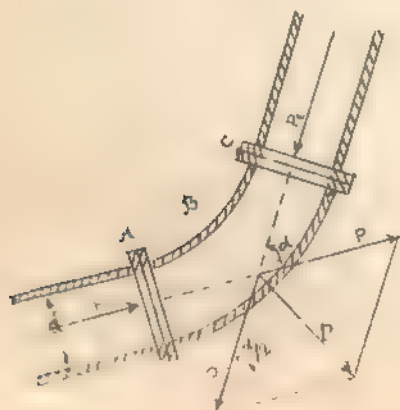
2. Опредѣлимъ равнодѣйствующую давленій воды на кривой участокъ трубы ABC . Пусть давленіе воды p атмосферъ и діаметръ трубы d см. Пренебрежемъ вѣсомъ заключенной въ колѣнѣ воды и рассмотримъ равновѣсіе отсѣка воды, заключеннаго въ колѣнѣ; на плоскости AA' и CC' дѣйствуютъ равныя между собой давленія:

$$P = P_2 = \frac{\pi d^2}{4} p$$

Полное давленіе P равно, очевидно, $P = 2P \sin \frac{\alpha}{2}$

16. Рассмотримъ еще случай давленія на погруженное въ жидкость тѣло A (фиг. 19).

фиг. 19.

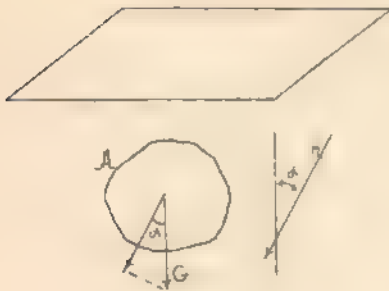


Для опредѣленія давленія применимъ такъ называемый принципъ отвердѣнія. Рассмотримъ равновѣсіе тѣла, одинаковаго съ рассматриваемымъ, но наполненнаго жидкостью. Очевидно, въ случаѣ равновѣсія всей массы жидкости и каждый отсѣкъ ея также находится въ равновѣсіи; отсѣ-

да непосредственно следует, что давление на тѣло уравниваетъ его вѣсъ. Такимъ образомъ, получаемъ, что составляющая давления жидкости на погруженное тѣло по какому либо направлению N равна по величинѣ проекціи на то же направленіе вѣса жидкости, равнаго съ тѣломъ объема, по направленію же прямо противоположному вѣсу.

Если за направленіе N взять направленіе вертикальное, то непосредственно получаемъ извѣстный законъ Архимеда; для

фиг. 19.



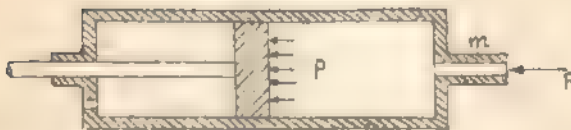
горизонтальнаго направленія имѣемъ давление нуль. Отсюда также ясно слѣдуетъ, что если давление во всей массѣ жидкости одинаково, то давление ея на погруженное тѣло равно нулю.

Мы не рассматриваемъ здѣсь вопросовъ равновѣсія плавающихъ тѣлъ, такъ какъ они излагаются въ спеціальному курсу "Энциклопедіи Судостроенія".

17. Машины, дѣйствующія давлениемъ воды.

Подъ таковыми мы разумѣемъ различные механизмы, основною частью которыхъ являются гидравлическій цилиндръ (фиг. 20), на который давитъ поступающая черезъ трубку m жидкость подъ да-

фиг. 20.



влениемъ p . Гидравлическій цилиндръ является основною всякаго рода гидравлическихъ подъемниковъ, гидравлическихъ ударныхъ и водостолбовыхъ машинъ, аккумуляторовъ, вресовъ и пр. Мы не можемъ здѣсь входить въ подробное описаніе всѣхъ подобнаго ра-

да механизмовъ*), до сихъ поръ имѣющихъ еще достаточно широкое примѣненіе тамъ, гдѣ необходимо либо развивать значительныя сосредоточенныя усилія, либо передавать на разстояніи отдѣльныя и притомъ "точные" перемѣщенія; мы ограничимся здѣсь лишь выводами нѣкоторыхъ общихъ соотношеній, имѣющихъ примѣненіе при оцѣнкѣ и расчетѣ всякихъ подобныхъ гидравлическихъ машинъ.

Пусть въ полости А (фиг. 21) гидравлическаго цилиндра имѣется жидкость подъ манометрическимъ давленіемъ p_m . "Манометрическимъ"

фиг. 21.



избыточное (противъ атмосфернаго) давленіе въ жидкости, замкнутой въ сосудѣ. Это давленіе непосредственно измѣряется обычнымъ манометромъ. (Вурдона и пр.).

Пусть рабочая площадь поршня F ; его ходъ S

Работа совершаемая поршнемъ за одинъ ходъ:

$$A = pFS = pW \quad (15)$$

гдѣ W полезный объемъ, занимаемый жидкостью или "полезная емкость цилиндра". Такимъ образомъ мы видимъ, что работа, которую можетъ совершить гидравлическій цилиндръ, равна произведенію его емкости на величину давленія рабочей жидкости.

Если мы будемъ выражать давленіе p въ атмосферахъ ($\frac{\text{килогр.}}{\text{см.кв.}}$), объемъ въ литрахъ (куб. дециметрахъ), а работу A въ килогр. метрахъ, то получимъ слѣдующее числовое соотношеніе (приводя все къ метрамъ, килограммамъ и дециметрамъ)

$$10A = W 100 p ; A_{\text{кilogr. метр.}} = 10pW \quad (15^*)$$

Такимъ образомъ цилиндръ, емкостью въ одинъ литръ, подъ

*) См. Blaine Hydraulic Machinery. Lea, Collier и пр.

давлєніємъ въ одну атмосферу даетъ 10 килгр.метровъ работъ.

Само собой очевидно, что носителницей энергіи является на самомъ дѣлѣ лишь жидкость подѣ давлєніємъ, и что формула (15*) выражаетъ лишь то, что можетъ быть названо работоємкостью жидкости. Одинъ литръ жидкости сдавленный до p атмосферъ, содержитъ въ себѣ $10 \cdot p$ кил.метр. энергіи.

Очевидно, что формула (15*) выражаетъ работу сжатой жидкости, переданную поршню и не учитываетъ потерь. Дѣйствительная работа, которая можетъ быть получена отъ поршня выражается соотношеніемъ:

$$A_{\text{эф.}} = \eta \cdot A = \eta \cdot 10 p W \quad . \quad . \quad (15^{**})$$

гдѣ η коэффициентъ полезнаго дѣйствія цилиндра.

Формула (15**) и служитъ для расчета всякихъ гидравлическихъ цилиндровъ.

П р и м ѣ р ъ 1: Определить размѣръ цилиндра гидравлическаго подъемнаго крана, поднимающаго 5 тоннъ на высоту 4 метр.; $p = 50$ атм. Задавая съ запасомъ $\eta = 0,8$, имѣемъ

$$W = \frac{5000 \times 4}{10 \cdot 50 \cdot 0,8} = 50 \text{ ltr}$$

Размѣры S и F могутъ быть выбраны по желанію.

2. Определить полезный объемъ гидравлическаго аккумулятора, работоємкость въ 180000 кил.м. при $p = 100$ атм./сант. и $\eta = 0,9$.

$$W = \frac{180000}{10 \cdot 100 \cdot 0,9} = 200 \text{ ltr}$$

Для пониманія того, какимъ образомъ несжимаемая жидкость можетъ явиться носителницей энергіи укажемъ, что на самомъ дѣлѣ жидкость является здѣсь лишь передатчикомъ давлєнія. Такъ въ схемѣ (фиг. 22) вода, поступающая въ рабочий гидравлическій цилиндръ, подается по трубкѣ m насосомъ H , для перемѣщенія поршня котораго требуется усиліе Q .

фиг. 22.

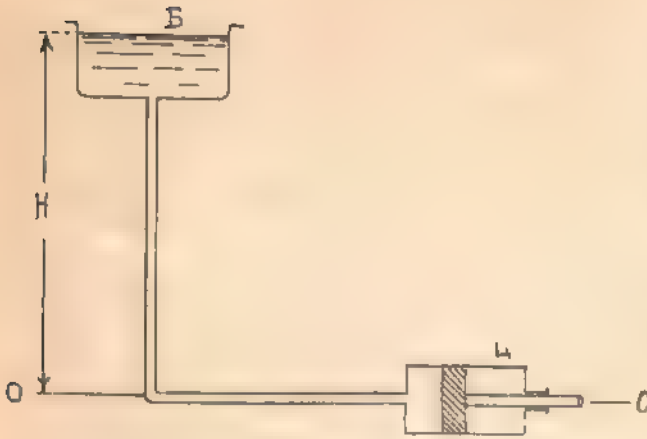
Въ схемѣ (ф. 23) рабочий цилиндръ соединенъ съ водонапорнымъ бакомъ B , находящимся на вы-



соте H надъ центромъ цилиндра, соответствующей давлению p ,

фиг. 23.

$$\text{т.е. } H = \frac{p}{\gamma}$$



Объемъ воды, входящий въ цилиндръ, падаетъ съ поверхности воды въ бакъ, т.е. совершаетъ работу

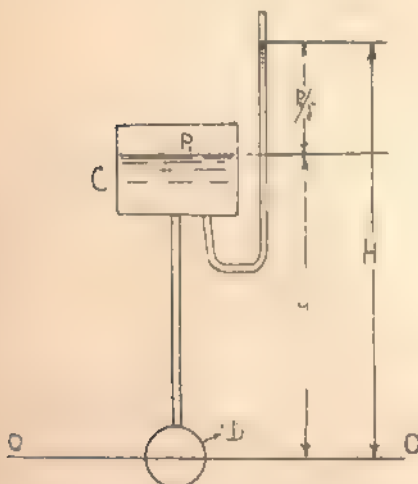
$$A = \gamma W H = W p$$

что тождественно съ формулой 15.

Изъ этого между прочимъ слѣдуетъ, что некоторый объемъ жид-

кости, скажемъ W , вѣса γW , находящейся въ цилиндрѣ подъ манометрическимъ давленіемъ p (фиг. 23), содержитъ въ себѣ такое же количество потенциальной энергіи по отношенію къ горизонтальной плоскости 00, какъ если бы этотъ же объемъ находился въ открытомъ бакѣ на высотѣ $H = \frac{p}{\gamma}$ и могъ бы падая совершить работу $\gamma W H$.

фиг. 24.



Такимъ образомъ, по отношенію къ плоскости 00, потенциальная энергія заключенная въ единичѣ вѣса жидкости, находящейся подъ давленіемъ p , въ сосудѣ С (фиг. 24) будетъ:

$$H_1 + \frac{p}{\gamma} = H$$

гдѣ H есть сумма геометрической высоти H_1 и манометрической $\frac{p}{\gamma}$.

Величину H будемъ на-

зывать манометромъ по отношенію къ плоскости 0-0.

Работоспособность объема жидкости по отношенію къ плоскости 0-0 равна.

$$\gamma W H$$

$\gamma W H$.

произведение веса на напор.

При расходе в двигателе в единицу времени объема Q — постоянная мощность, подводимая к двигателю есть

$$N_{\text{abs}} = Q H$$

его полезная мощность

$$N_{\text{eff}} = \eta \gamma Q H$$

Если измерять H в метрах; Q в $\frac{\text{куб. метр.}}{\text{сек.}}$ и N в лошадиных силах, то

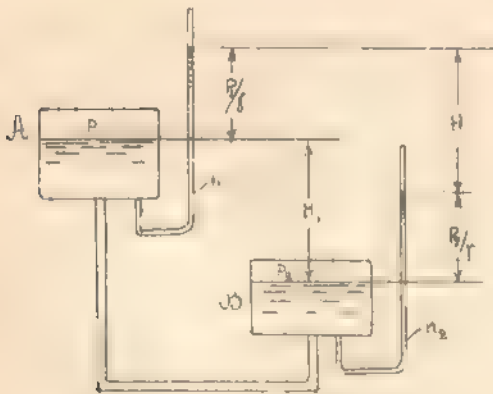
$$N_{\text{eff}} = \eta \frac{1000 Q H}{75} \text{ лш сил} \quad (16)$$

Принимая в среднем $\eta = 0.75$ имеем:

$$N_{\text{eff}} = 10 Q H \text{ лш сил}$$

формулу широко употребляемую для предварительных расчетов в устройствах, использующих энергию падения воды.

рис. 25.



При расходе в жидкости между сосудами A и B с геометрической разностью уровней H , и давлениями соответственно p_1 и p_2 работа, совершаемая единицей веса жидкости равна

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = H$$

Таким образом, напор есть просто разность уровней в пьезометрических трубках n_1 и n_2 .

Глава II.

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВООБЩЕ.

18. О струйчатомъ движеніи жидкости.

1. Въ основѣ естественныхъ представлений о движеніи жидкости, возникающихъ изъ непосредственнаго наблюденія, лежитъ представленіе объ его струйчатомъ характерѣ.

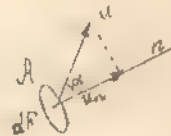
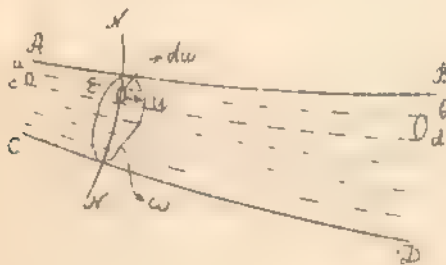
Потокъ движущейся жидкости (фиг. 26) мысленно разбивается на цѣлый рядъ элементарныхъ струй - трубокъ (ac cd и пр.), ось каждой изъ нихъ касательна къ направленію скорости; оси соответственныхъ трубокъ-струй представляютъ изъ себя тѣмъ самыя траекторіи движущихся частицъ.

Очевидно, поверхность раздѣляющую подобныя мысленныя трубки можно было бы замѣнить бесконечно тонкой жесткой непроницаемой стѣнкой безъ того, чтобы что либо въ движеніи измѣнилось.

Выделимъ въ точкѣ А (фиг. 27) движущуюся жидкости элементарную площадку dF . Пусть направленіе скорости u жидкости въ этой точкѣ составляетъ съ нормалью n къ площадке уголъ α .

фиг. 26.

фиг. 27.



Величину

$$dq = dF u \cos \alpha = u_n dF$$

будемъ называть потокомъ черезъ площадку dF въ точкѣ А.

Въ любой точкѣ ϵ струйки $accd$ (фиг. 26) проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси струйки; сѣченіе струйки такою плоскостью назовемъ "живымъ сѣченіемъ струйки"; величину площади его обозначимъ dw .

Такъ какъ скорость перпендикулярна къ живому сѣченію,

то соответственный поток равен $u dw$, очевидно, в то же самое время, поток через любой элемент струйки равен нулю.

Исходя из точки ε построим поверхность $N-N'$ ортогональную к направлению струй, т. е. поверхность, каждый элемент которой в любой точке перпендикулярен к направлению соответственной струи.

Поверхность эту назовем "живым сечением" потока в точке ε *). Величина площади этой поверхности

$$\omega = \int_{\omega} dw$$

(предполагая, что интеграл взят в пределах всего потока) назовем "площадью живого сечения" потока в точке ε .

Полный поток или, как его обычно называют в гидравлике, "расход" жидкости, равный объему протекающей в единицу времени через данное живое сечение жидкости, очевидно, будет равен

$$Q_{\varepsilon} = \int_{\omega} u dw$$

Величину

$$U = \frac{Q_{\varepsilon}}{\omega} = \frac{\int_{\omega} u dw}{\int_{\omega} dw} \quad (17)$$

назовем средней скоростью в сечении

Очевидно, что

$$Q = U \omega$$

Пока что мы представили себе струйки, как бы действительно существующими, т. е. в виде действительных трубок, характеризуемых тем, что ось каждой из них есть действительная траектория частицы, что раз попавшая в данную трубку частица продолжает в ней оставаться, что объемы частиц между стенками между соседними трубками не существуют. Как мы увидим ниже такому представлению соответствует в действительности лишь небольшое число реальных движений. В огромном большинстве случаев, почти во всех, представляющих практический интерес, движение молекул не связано с определенной траекторией-трубкой. Между струйками существует непрерывный объем частиц.

*) Ясно, что через каждую точку можно провести одно и только одно живое сечение.

Тѣмъ не менѣе, какъ мы увидимъ ниже, струйка можетъ продолжать существовать, но уже не какъ дѣйствительная трубка, а какъ нѣкоторая математическая функція, представляющая средній "статистическій" результатъ дѣйствительныхъ движеній.

Представленіе о "струйчатомъ" движеніи жидкости лежитъ въ основѣ гидравлики съ самаго начала ея возникновенія; съ этимъ представленіемъ связано все развитіе науки; отказъ отъ "струйчатой модели" (изъ предыдущаго ясно, что теперь о струйчатомъ движеніи можно говорить уже лишь какъ о "модели") былъ бы равносильнъ въ настоящій моментъ полному крушенію практической гидравлики, такъ какъ въ этой модели пока еще не существуетъ примовъ разсмотрѣнія, которые давали бы реальные результаты и приводили къ возможности конкретныхъ рѣшеній вопросовъ.

Одной изъ огромныхъ заслугъ Boussinesq'a (о работахъ котораго мы неоднократно будемъ говорить впереди) служить между прочимъ то, что въ своей "Теоріи водныхъ теченій"*) , показавъ возможность оперировать надъ фиктивной "статистической" струйкой какъ надъ реальной, онъ тѣмъ самымъ далъ возможность гидравлику сохранить накопленные годами долгой работы результаты и пока что примирилъ "старую" теорію съ новыми представленіями о движеніи жидкости.

Мы въ дальнѣйшемъ вернемся еще къ этому вопросу; пока же въ послѣдующемъ будемъ пользоваться "струйчатой моделью", какъ если бы она въ дѣйствительности соответствовала реальнымъ явленіямъ.

19. Терминологія.

Прежде чѣмъ идти дальше, установимъ нѣкоторые термины.

Мы будемъ называть "установившимся" такое движеніе, въ которомъ элементы движенія въ



какой либо опредѣленной точкѣ не измѣняются по времени. Установившимся движеніемъ будетъ, напримѣръ, движеніе въ трубѣ T (фиг. 28), соединяющей два водоема A и B съ постоянными горизонтами воды; или истече-

*) "Théorie des eaux courantes". Mem. Ac. 1873.

ние жидкости черезъ отверстіе подѣ постояннымъ напоромъ и пр.

Очевидно, что въ случаѣ установившагося движенія всѣ трубки-струи постоянно сохраняютъ свое положеніе, форму и величину. Въ каждой точкѣ движущейся жидкости величина и направленіе скорости остаются неизмѣнными. Остается неизмѣнной также и величина давленія. Такимъ образомъ въ установившемся движеніи скорости, ускоренія и давленія являются лишь функциями координатъ. Обратно, "неустановившимся" или "перемѣннымъ" мы будемъ называть движеніе, въ которомъ элементы движенія (скорости, ускоренія и давленія) измѣняются по времени.



Въ неустановившемся движеніи трубки-струи мѣняютъ свое положеніе, форму и величину. Элементы движенія являются функциями, какъ координатъ, такъ и времени. Прибѣромъ такого движенія можетъ служить волна на поверхности какого либо водоема.

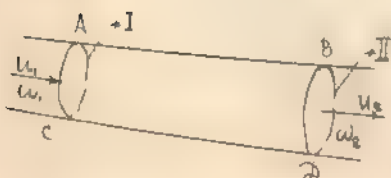
Необходимо далѣе различать "равномѣрное" и "неравномѣрное" движеніе.

"Равномѣрнымъ" называется такое движеніе, въ которомъ какъ живыя сѣченія, такъ и скорости и ускоренія въ одинаковыхъ точкахъ живыхъ сѣченій одинаковы. "Равномѣрнымъ" будетъ, напримѣръ, движеніе въ цилиндрической трубѣ или въ каналѣ одинаковаго сѣченія при постоянной глубинѣ и въ разстояніи достаточномъ отъ начала трубы или канала, чтобы установилось распредѣленіе скоростей.

Наоборотъ, "неравномѣрнымъ" будетъ называться движеніе, въ которомъ измѣняется либо величина живого сѣченія, либо распредѣленіе по одинаковому живому сѣченію скоростей и ускореній. Первое имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ конической (сходящейся или расходящейся) трубѣ, второе — хотя бы въ цилиндрической трубѣ въ начальныхъ ея сѣченіяхъ.

Начало неперемѣнности:

Представимъ себѣ элементъ  потока, находящагося въ установившемся движеніи, ограниченный двумя живыми сѣченіями I и II и боковой поверхностью .



Поверхность эта можетъ быть либо жесткой стѣнкой (напр. стѣнка трубы), либо свободной поверхностью раздѣла двухъ разнород-

ныхъ жидкостей (струя въ воздухѣ), наконецъ, просто нѣкоторой мысленной поверхностью, проведенной въ средѣ жидкости.

Важно лишь, чтобы она "обертывала" известную совокупность струй, т.е. чтобы поверхность эта была всюду касательна к струям. Заметим еще, что в силу определения "установившегося" движения поверхность эта остается неизменной.

В промежуток времени Δt объем жидкости, вошедший через сечение I в рассматриваемый отсек, равен

$$\omega_1 u_1 \Delta t$$

объем вытекший через сечение II

$$\omega_2 u_2 \Delta t$$

В силу несжимаемости жидкости равенство

$$\omega_1 u_1 \Delta t = \omega_2 u_2 \Delta t \quad (1)$$

Таким образом, в установившемся движении

$$\omega_1 u_1 = \omega_2 u_2 = Q ; \quad \frac{u_1}{\omega_2} = \frac{u_2}{\omega_1} \quad (18)$$

т.е. расход через любое сечение потока или струи постоянен и скорости обратно пропорциональны площадям сечений. Уравнение (18) представляет из себя одно из наиболее важных соотношений гидравлики и носит название "уравнения или условия непрерывности"; оно является непосредственным следствием представления о "непрерывном заполнении и об отсутствии пустот в занимаемом жидкостью пространстве".

В случае неустановившегося движения разность (в данный момент) втекающих и вытекающих через сечения I и II объемов жидкости должна пойти на увеличение объема отсека, т.е. при постоянной его длине, на раздвижение стенок. Очевидно, вместо (1) имеем

$$(\omega_1 u_1 - \omega_2 u_2) \Delta t = \Delta W \quad \text{или} \quad (q_1 - q_2) \Delta t = \Delta W$$

где ΔW увеличение объема отсека.

Переходя к сечениям бесконечно близким (на расстоянии Δs друг от друга) имеем в предель:

$$q_1 - q_2 = \frac{\partial q}{\partial s} ds$$

$$\Delta W = ds \frac{\partial \omega}{\partial t} dt$$

Таким образом, уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

20. Уравнение Бернулли.

Однимъ изъ наиболѣе важныхъ орудій гидравлики является соотношеніе, получаемое прикиньемъ къ струйкѣ движущейся жидкости начала живыхъ силъ.

Въ примѣненіи къ установившемуся движенію тяжелой жидкости соотношеніе это называется обыкновенно уравненіемъ Даниэля Вернулли. Выведемъ его пока для случая установившагося движенія идеальной жидкости. Будемъ рассматривать элементарную струйку опредѣляемую осью $S-S$ (фиг. 30); рассмотримъ элементарное перемѣщеніе за промежутокъ времени Δt части струйки, заключенной между сѣченіями 1 и 2, изъ положенія AB въ $A'B'$.

Индексами 1 и 2 будемъ отмѣчать величины относящіяся къ соответственнымъ сѣченіямъ.

Перемѣщенія $\Delta S_1 = AA$ и $\Delta S_2 = BB'$ очевидно, соответственно равны

$$\Delta S_1 = u_1 \Delta t ; \quad \Delta S_2 = u_2 \Delta t$$

Въ силу начала непрерывности

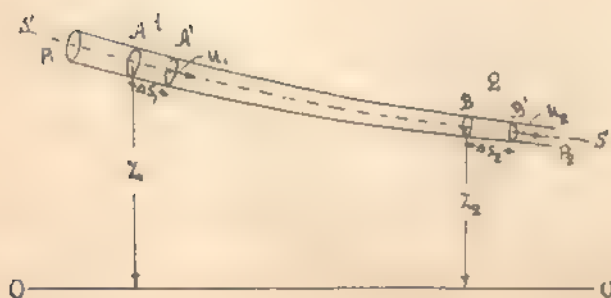
$$q = \omega_1 u_1 = \omega_2 u_2$$

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Очевидно, также равны между собой и объемы AA' и BB' :

$$q = \omega_1 u_1 \Delta t = \omega_2 u_2 \Delta t$$

фиг. 30.



Прикиньмъ теперь законъ живыхъ силъ. Измѣненіе живой силы равно лишь разности живыхъ силъ, заключенныхъ въ объемъ BB' и AA' , такъ какъ въ силу установившагося движенія, жи-

вая сила массы, заключенной въ отрезкѣ $A'B$ не измѣнилась.

Такимъ образомъ, измѣненіе живой силы равно

$$\gamma q \Delta t \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right)$$

Работа силъ складывается изъ:

1) работы силъ тяжести равной

$$\gamma q \Delta t (z_1 - z_2)$$

гдѣ Z разстояние до центровъ тяжести соответствующихъ сѣченій отъ некоторой горизонтальной плоскости $O-O$,

2) работы давленій; въ выраженіе последней, очевидно, входятъ лишь работы давленій въ сѣченіяхъ ω_1 и ω_2 , такъ какъ давленія на боковыя стѣнки струйки перпендикулярны къ перемѣщеніямъ и, следовательно, работы ихъ равны нулю. Тѣмъ самымъ работа давленій выразится

$$p_1 \omega_1 \Delta s_1 - p_2 \omega_2 \Delta s_2 = p_1 \omega_1 u_1 \Delta t - p_2 \omega_2 u_2 \Delta t = q \Delta t (p_1 - p_2)$$

Сопоставляя, получаемъ:

$$\gamma q \Delta t \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) = \gamma q \Delta t (z_1 - z_2) + q \Delta t (p_1 - p_2) \quad (II)$$

Дѣля на $\gamma q \Delta t$ и разнося члены съ одинаковыми индексами въ соответственныя стороны, имѣемъ:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \quad (III)$$

или, такъ какъ мы ничѣмъ не ограничивали выбора нашихъ сѣченій, то

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (19)$$

Уравненіе (19) можно написать въ дифференціальномъ формѣ:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{\gamma ds} + \frac{u du}{2g ds} = 0 \quad (19^{bis})$$

Все члены лѣвой части уравненія (19) имѣютъ измѣреніе длины (фиг. 31).

1) Z измѣряетъ, какъ выше было указано, высоту точки A надъ горизонтальной плоскостью $O-O$;

2) $\frac{p}{\gamma} = h_p$ есть величина пьезометрическаго давленія: она измѣряетъ высоту столба жидкости въ пьезометрѣ Π .

Было въ отдѣлѣ о простыхъ гидравлическихъ машинахъ мы назвали, что энергію, заключенную въ некоторомъ объемѣ жидкости, можно измѣрять произведеніемъ вѣса жидкости на некоторую высоту, которую мы называли напоромъ (см. стр.35).

Въ рассматриваемомъ случаѣ напоръ, измѣряющій величину удѣльной потенціальной энергіи равенъ, очевидно, $z + \frac{p}{\gamma}$; напоръ, соответствующій удѣльной кинетической энергіи, $\eta_k = \frac{u^2}{2g}$. Следовательно, и постоянная въ уравн.(19) есть тоже напоръ H , измѣряющій полную удѣльную энергію, т.е. полную энергію, заключающуюся въ единицѣ вѣса протекающей черезъ струйку жидкости.

Уравненіе (19) $H = \text{const}$ определяетъ положеніе некоторой горизонтальной плоскости $N-N'$, которую называютъ обычно "напорной плоскостью".

Ясно, что плоскость $O-O$ мы можемъ вообще назначать какъ угодно. Ее можно даже совершенно не назначать; для характеристики движенія достаточно лишь знать плоскость напора $N-N'$.

Отвѣтимъ еще слѣдующее. Если вдоль струи установить (подобно точкѣ А) рядъ пьезометрическихъ трубокъ, уровни жидкости въ нихъ расположатся по линіи $a-b$. Ординаты линіи ab , которую мы будемъ называть пьезометрической линіей или линіей пьезометрическихъ высотъ, относительно плоскости $O-O$ равны:

$$z + \frac{p}{\gamma}$$

Очевидно, линія эта служитъ мѣриломъ потенціальной удѣльной энергіи, заключенной въ жидкости, относительно любой плоскости $O-O$.

Замѣтимъ также, что если мы измѣнимъ положеніе трубки $S-S'$ (скажемъ въ $S''-S'''$), но такъ, чтобы общее содержаніе энергіи определяемое некоторыми начальными условіями, а также скорости въ трубкѣ не измѣнились, то пьезометрическая линія $a-b$ остается безъ измѣненія. Линія пьезометрическихъ высотъ не измѣнится также, если мы измѣнимъ положеніе плоскости $O-O$. Мы тѣмъ самымъ лишь перенесемъ плоскость сравненія $O-O$ и соответственно увеличимъ или уменьшимъ мѣру потенціальной энергіи.

Уравненіе (19) играетъ огромную роль въ гидравликѣ. Оно даетъ возможность по двумъ известнымъ элементамъ движенія

струйки (скажем Z и W) определять третій (ρ) и т.д.

Уравнение называется именем Даниэля Вернулли по той причине, что последний въ своемъ знаменитомъ сочиненіи "Hydrodynamica" (Strassburg 1738), положившии собственно основу современной гидравликѣ, впервые применилъ законъ живыхъ силъ къ рѣшенію гидравлическихъ вопросовъ и въ частности рѣшилъ, пользуясь имъ, основной вопросъ о нахожденіи величины давления внутри движущейся жидкости. Въ форѣ (19), однако, уравненіе у самого Вернулли не встрѣчается; эту "классическую" форму придалъ уравненію Эйлеръ (Hist. de l'Ac. de Berlin 1755).

21. Значеніе уравненія Вернулли въ гидравлики заставля-
етъ насъ привести выводъ его и другимъ путемъ, а именно, непосредственно изъ основного уравненія движенія, подобно тому, какъ вообще говоря, законъ живыхъ силъ выводится изъ основныхъ уравненій динамики.

Составимъ уравненіе движенія для элемента струйки длиною ds (фиг. 32).

Масса элемента $m = \int \rho \, dw \, ds$

Дѣйствующія въ направленіи оси силъ:

а) составляющая силы тяжести

б) разность давленій на сѣченіяхъ

$$\int \rho \, dw \, ds \sin \varphi$$

$$dw(p - (p + dp))$$

фиг. 32.

Принимая во вниманіе, что

$$\sin \varphi = -\frac{dz}{ds} \text{ получаемъ}$$

$$dw \rho \, ds \int \frac{dw}{\rho} \frac{du}{dt} = -dw \rho \, ds \int \frac{dz}{ds} \frac{u^2}{2} = dw \rho \, dp \quad (*)$$

Такъ какъ въ случаѣ установившагося движенія

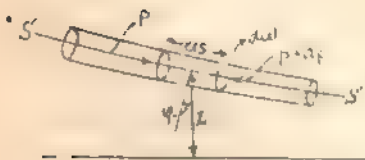
$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = u \frac{du}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

то уравненіе (*) превращается по раздѣленіи на $dw \rho \, ds$.

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) + dz + \frac{dp}{\rho} = 0$$

или

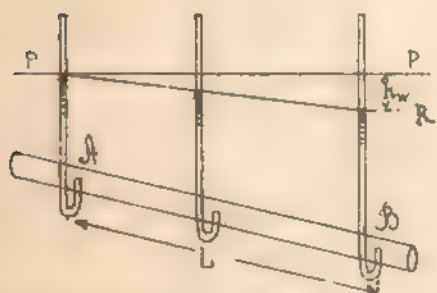
$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$



22. Для иллюстраціи уравненія Бернулли приведемъ нѣсколь-
ко примѣровъ.

а) Движеніе въ цилиндрической трубкѣ А-В (фиг. 33). Такъ
какъ скорость всюду одинакова, то, очевидно, $z + h_p$ также
всюду одинаково. Такимъ образомъ, при движеніи идеальной жид-
кости по цилиндрической трубкѣ пьезометрическая линія $p-p$
горизонтальна.

б) Цилиндрическія трубы А и В (фиг. 34) одинаковаго
діаметра соединяются особомъ вставкомъ К-К, сперва конически
сходящейся, затѣмъ расходящейся, называемъ сѣченіями трубъ въ
фиг. 33.



А и С ω_1 и ω_2 , $\kappa = \frac{u_2}{u_1} =$
 $= \frac{\omega_1}{\omega_2}$; и расходъ воды Q
имѣемъ въ силу (19)

$$h_{p1} + \frac{u^2}{2g} = h_{p2} + \frac{u^2}{2g}$$

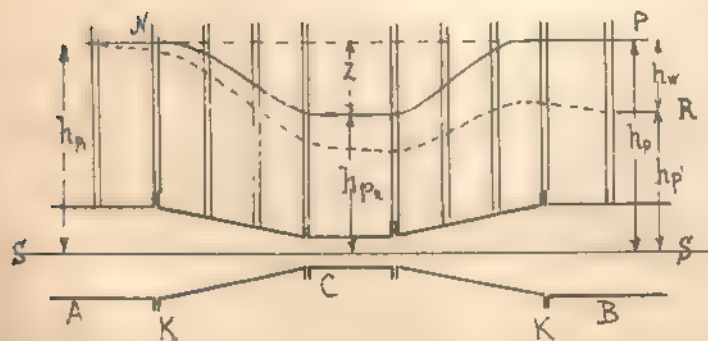
$$h_{p1} - h_{p2} = Z = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} =$$

$$= \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right) = Q^2 \frac{\kappa^2 - 1}{2g\omega_1^2}$$

откуда въ свою очередь

$$Q = \omega_1 \sqrt{\frac{2gz}{\kappa^2 - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

фиг. 34.



Такимъ об-
разомъ, зная
сѣченіе тру-
бы I и коэф-
фициентъ су-
зѣнія горло-
вины К мож-
но по соот-
ношенію (A)
опредѣлить

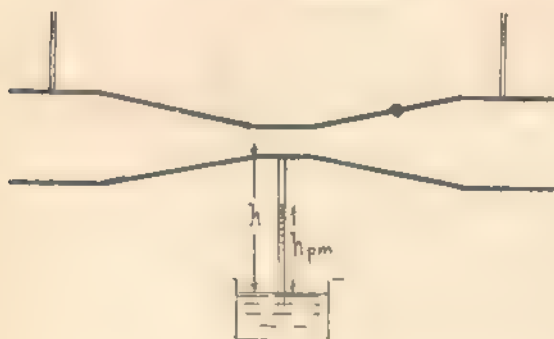
расходъ жидкости по разности пьезометрическихъ давленій Z .

На этомъ основанъ такъ называемый водомѣръ*) Вентури, изобрѣ-
тенный въ 1881 г. американск. инж. К. Гершелемъ. Водомѣры этого
названія очень широкое приложеніе особенно тамъ, гдѣ идетъ
дѣло объ измѣреніи значительныхъ количествъ протекающей воды,
и гдѣ въ силу именно послѣднихъ обстоятельствъ неудобно при-
мѣнять различные другіе водомѣры со сложными движущимися ча-
стями, передачами къ регистраціоннымъ механизмамъ и пр.

Въ силу закона непрерывности скорость въ суженныхъ сѣче-
ніяхъ увеличивается, вмѣстѣ съ тѣмъ падаетъ, въ силу уравне-
нія (19), давленіе. Въ конически сходящейся части происхо-
дитъ превращеніе потенциальной энергіи въ кинетическую, въ
расходящейся части обратно, кинетическая энергія вновь воз-
становляется въ потенциальную. Пьезометр. линія p p приобрь-
таетъ видъ начерченной кривой, при томъ, очевидно, для иде-
альной жидкости, движущейся безъ потери энергіи, пьезометри-
ческія высоты h_p и h_p въ одинаковыхъ трубахъ А и В одинаковы.

При значительномъ суженіи трубы давленіе въ С можетъ
стать ниже атмосфернаго; въ такомъ случаѣ (фиг. 35) въ

фиг. 35.



пьезометрической трубкѣ
 p , опущенной въ сосудъ
съ жидкостью, послѣдняя
будетъ подниматься, но
трубкѣ и высота столба
 h_p будетъ мѣнять ве-
личину вакуума или не-
достачу давленія въ С
до атмосфернаго. При со-
отвѣтственномъ соотно-
шеніи величинъ вакуума

и высоты h жидкость изъ сосуда будетъ всасываться и непре-
рывно поступать въ горловину С; на этомъ основанъ принципъ
устройства такъ называемыхъ водоструйныхъ насосовъ, инжекто-
ровъ и пр.

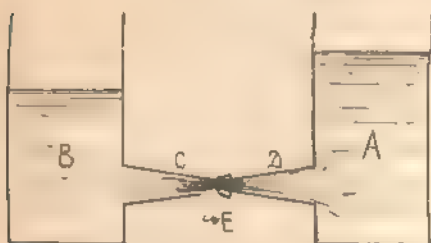
Reynolds, увеличивая степень суженія горловины, до-
стигъ того, что вода въ ней, благодаря сильному разрыву,

*) Водомѣрами въ практикѣ водоснабженія называемой при-
боръ, служащіе для опредѣленія и регистраціи количествъ во-
ды, протекающей черезъ трубы.

кипіла при обыкновенной температурѣ.

Крайне интересенъ также опытъ Froude'a, въ которомъ вода переливается изъ сосуда А въ сосудъ В (ф.36) по системѣ коническихъ сходящихся и расходящихся трубъ С и D ; сперва сосуды эти устанавливаются такъ, что отверстія трубъ соприкасаются, въ послѣдствіи сосуды можно раздвинуть, но это не нарушаетъ явленія и струя частью проходитъ по воздуху.

фиг. 36



23. Введеніе сопротивленій.

Поставимъ теперь общій вопросъ о томъ, какъ измѣнится уравненіе Бернулли (19), если примѣнить его къ вязкой жидкости, при движеніи которой имѣетъ мѣсто сопротивленіе.

Не входя пока еще совершенно въ природу сопротивленій, ни въ ихъ количественную оцѣнку, замѣтимъ лишь, что всякія сопротивленія проявляются во всякомъ случаѣ въ томъ, что благодаря имъ при движеніи происходитъ разсѣяніе энергіи, производится нѣкоторая необратимая работа.

Вернемся къ фиг. 30 и предположимъ, что при перемѣщеніи элемента $Q\Delta t$ изъ положенія АВ въ А'В' силы сопротивленія произвели нѣкоторую работу R_w . Работа, какъ мы выше видѣли, можетъ вообще выражаться произведеніемъ вѣса соответственнаго объема жидкости на нѣкоторый напоръ.

Для объема жидкости $Q\Delta t$, протекающаго черезъ любое сѣченіе трубки (фиг.31) въ теченіе элемента времени Δt , для котораго вообще составлено уравненіе (II), работа силъ сопротивленія на участкѣ А-В можетъ быть выражена черезъ

$$R_w = \gamma Q \Delta t h_w \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

гдѣ γ нѣкоторый, соответствующій работѣ R_w , напоръ.

Работа R_w должна быть вычтена изъ работы силъ тяжести и давленій въ правой части уравненія (II).

Такимъ образомъ, высто уравненія (III) получимъ

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = z_1 + \frac{p}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - h_w \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и называя полные напоры въ А и В H_1 и H_2

$$H_1 - H_2 = h_w$$

Въ дифференціальной формѣ уравненіе (20) получитъ видъ.

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = - \frac{dh_w}{ds}$$

или называя E величину удѣльной энергии

$$\frac{dE}{ds} = - \frac{dh_w}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Величина $\frac{dh_w}{ds}$ равна, очевидно, уклону напорной линіи i_n въ данномъ сѣченіи;

$$\frac{dE}{ds} = - \frac{dh_w}{ds} = - i_n \quad . \quad . \quad . \quad (C')$$

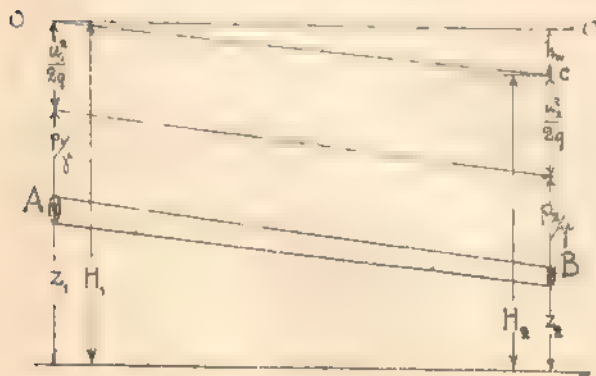
Такимъ образомъ, происходящее, благодаря наличію сопротивленія разсѣяніе энергии выражается въ потерѣ напора.

Сумма

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

уже не будетъ оставаться постоянной и не будетъ изображать "напорную плоскость" ($O-O$) (фиг.37), а будетъ вдоль теченія уменьшаться и соответствовать некоторой кривой $O-C$ отклоненіе которой отъ прямой $O-O$ въ точкѣ B измѣряетъ потерю напора на участкѣ AB .

фиг. 37.



Подобно тому, какъ всѣ члены ур-нія (19) изображаютъ мѣру соответственныхъ "удѣльныхъ энергій", такъ и величина h_w служитъ мѣрою энергій, потерянной единицей вѣса жидкости на опредѣленномъ участкѣ трубки.

Помножая h_w на γQ вѣсъ жидкости протекающей черезъ данное сѣченіе въ единицу времени, получаемъ, работу силъ сопротивленія въ единицу времени, т.е. мощность

на сопротивление на определенном участке.

В частности при движении вязкой жидкости по цилиндрической трубке (фиг. 33) пьезометрическая линия вместо того, чтобы быть горизонтальной, делается наклонной (P-R).

Действительно, благодаря цилиндричности трубы, потеря напора одинакова для участков трубы одинаковой длины и следовательно, просто пропорциональна длине труб, в силу чего пьезометрическая линия прямая.

Уклон этой линии i_p называется пьезометрическим уклоном; для равномерного движения потеря на некотором участке длины L *):

$$h_w = L \sin \alpha = i_p L$$

Величина $i_p = \sin \alpha$ определяет работу сопротивлений, отнесенную к единице веса жидкости, на единице длины.

Величина $\gamma i_p Q$ есть, очевидно, мощность сил сопротивлений на единице длины.

На фиг. 34 линия NR также изображает действительную пьезометрическую линию, причем разность ординат идеальной (P) и действительной (NR) линий измеряет потерю напора на участке от N до соответственной точки.

24. Уравнение Бернулли для сплошного потока.

В предыдущем уравнение (19) мы вывели лишь для отдельной элементарной струйки. Между тем, при решении практических вопросов о движении жидкостей нам обычно приходится иметь дело с потоками конечных размеров.

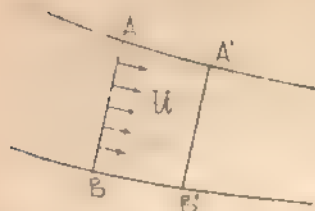
Для решения подобных вопросов Bernoulli и D'Alembert пользовались, так называемой моделью "плоских сечений" другими словами, действительное движение жидкости они заменили фиктивным, у которого (фиг. 38) все частицы в некотором сечении АВ имеют одинаковые скорости, равные "средней скорости"

$$u = \frac{Q}{\omega}$$

*) для случая равномерного движения (так $\frac{d}{ds} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = 0$) очевидно $i_p = i_n$, т.е. пьезометрический уклон равен величине уклона напорной линии, так как образом (см. (1')) $\frac{dE}{ds} = i_p$

Тѣмъ самымъ всѣ точки даннаго сѣченія перемѣщаются одинаково и сѣченіе AB переходитъ въ $A'B$ сохраняя плоскій видъ.

фиг. 38.

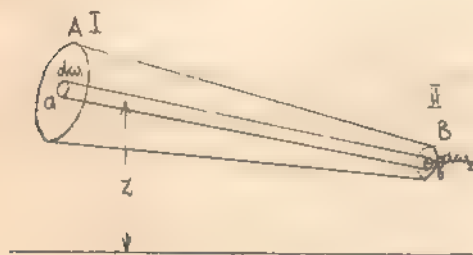


И до настоящаго времени во многихъ курсахъ сохраняется эта модель плоскихъ сѣченій. На самомъ же дѣлѣ она вовсе не нужна. Какъ показали еще Co riolis (1836) въ некоторыхъ частныхъ случаяхъ уравненіе живыхъ силъ, примененное къ вѣлому потоку непосредствен-

но приводитъ къ выраженію, подобному (19). Тамъ же, гдѣ такое приведеніе не можетъ быть сдѣлано, не можетъ ничего дать, какъ мы увидимъ ниже, и гипотеза плоскихъ сѣченій.

Разсмотримъ потокъ конечныхъ размѣровъ AB , находящійся въ установившемся движеніи (фиг. 39). Для отдѣльной его струйки

фиг. 39.



ки $a-b$ сѣченія (въ A и B) dw , и dw' составили уравненіе живыхъ силъ въ формѣ (II); добавляя членъ, зависящій отъ потерь и сокращая надѣ, получили

$$\gamma q \frac{u_z^2}{2g} + \gamma q \left(z - \frac{p_z}{\gamma} \right) = \gamma q \frac{u_z^2}{2g} + \gamma q \left(z - \frac{p}{\gamma} - R_n \right)$$

Мы можемъ составить подобныя выраженія для всѣхъ отдѣльныхъ струекъ и сложить ихъ; тѣмъ самымъ получимъ уравненія живыхъ силъ для всего потока.

Произведемъ подобную операцію почленно.

$$1) \int_{w_1} \gamma q \frac{u_z^2}{2g} \quad \text{и} \quad \int_{w_1} \gamma q \frac{u_z^2}{2g} \quad \text{представляетъ, очевидно, нѣ}$$

себя выраженіе живой силы всей массы жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ сѣченія I и II. Выраженія эти, принимая во вниманіе, что $q = u dw$, преобразовываются слѣдующимъ образомъ:

$$\int_{\omega} \gamma q \frac{U^2}{2g} = \int_{\omega} U^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} \alpha U^2 \omega = \alpha \frac{\gamma U^2}{2g} U \omega = \alpha \gamma Q \frac{U^2}{2g} \quad (21)$$

гдѣ ω площадь всего сѣченія; U есть средняя скорость по сѣченію, а α есть численный коэффициентъ.

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} U^3 d\omega}{U^2 \omega} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

замѣримъ, какъ видно изъ сопоставленія перваго и послѣдняго члена выраженія (21), отношеніе дѣйствительной живой силы, заключающейся въ массѣ протекающей черезъ данное сѣченіе въ единицу времени жидкости, къ живой силѣ, которая имѣла бы масса при томъ же расходѣ $Q = \int_{\omega} U d\omega = U \omega$, если бы всѣ частицы въ сѣченіи обладали одинаковыми скоростями, равными средней.

Такимъ образомъ, уравненіе (21) даетъ возможность выражать измѣненіе живой силы въ сѣченіяхъ I и II черезъ измѣненіе среднихъ скоростей, т. е.

$$\int_{\omega_2} \gamma q \frac{U^2}{2g} - \int_{\omega_1} \gamma q \frac{U^2}{2g} = \gamma Q \left(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} \right)$$

Какъ легко показать, величина α всегда больше единицы. Пусть дѣйствительно. (Фиг. 40) кривая AB изображаетъ истинное распредѣленіе скоростей по сѣченію. прямая же CD соотвѣтствуетъ средней скорости

$$U = \frac{\int_{\omega} U d\omega}{\omega} = \frac{\int_{\omega} U d\omega}{\int_{\omega} d\omega}$$

Назовемъ ε переменную величину (положительную или отрицательную), изображающую разность между дѣйствительными скоростями и средней. По опредѣленію

$$u = U \pm \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$U = \frac{\int_{\omega} U d\omega}{\int_{\omega} d\omega} = \frac{\int_{\omega} U u d\omega}{\omega} = \frac{\int_{\omega} \varepsilon u d\omega}{\omega} = U + \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \varepsilon d\omega$$

слѣдовательно,

$$\int_{\omega} \varepsilon d\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Составимъ теперь еще выраженіе количества движенія, заключеннаго въ протекающей черезъ данное сѣченіе въ единицу

$$\mathcal{M} \Gamma = \frac{\gamma}{2g} \left[U^3 \omega - 3U^2 \int \varepsilon d\omega + 3U \int \varepsilon^2 d\omega + \int \varepsilon^3 d\omega \right]$$

или принимая во внимание (6) и (6)

$$\mathcal{M} \Gamma = \frac{\gamma}{2g} U^3 \omega \left[1 + 3\eta + \frac{\int \varepsilon^2 d\omega}{U^2 \omega} \right] \quad . \quad . \quad (e)$$

Величины $\frac{\varepsilon^2}{U^2}$ малы по сравнению с единицей; в сумму притом они входят с разными знаками. Потому третьим изъ выражений стоящих въ (e) въ скобках можно пренебречь.

Такимъ образомъ получимъ

$$\mathcal{M} \Gamma = \frac{\gamma}{2g} U^3 \omega (1 + 3\eta)$$

Сопоставляя съ (21) и (22) имѣемъ

$$\alpha = 1 + 3\eta$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что какъ живая сила, такъ и количество движенія могутъ выразиться черезъ среднюю скорость; для этого надо лишь знать величину

$$\eta = \frac{\int \varepsilon^2 d\omega}{U^2 \omega}$$

Величина эта, очевидно, измѣняется въ зависимости отъ наличнаго распредѣленія скоростей. Для установившагося равномернаго движенія въ каналахъ и трубахъ η можно въ среднемъ полагать равнымъ $\eta = 0.033$ и соответственно

$$\alpha = \approx 1.1 \quad *)$$

II. Перейдемъ теперь къ составленію выразенія суммы членовъ, выражающихъ потенциальную энергію потока:

$$\gamma \int_{\omega} q \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

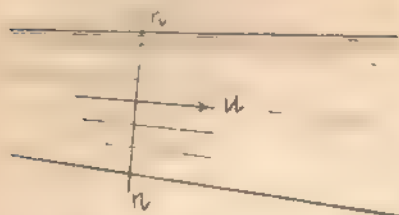
Для этого, очевидно, необходимо прежде всего знать распредѣленіе давления по сѣченію; въ одномъ частномъ случаѣ это дѣлается безъ всякаго труда, именно въ случаѣ такъ называемаго "медленно измѣняющагося движенія"

Предположимъ течение (фиг. 41) удовлетворяющее слѣ-

*) Более подробно вопросъ, объ α , мы рассмотримъ въ III части курса.

дуючихъ условіяхъ:

фиг. 41.



1) Линія тока представляются почти прямыми, такъ что кривизна ихъ бесконечно мала.

2) Линія сѣченія неѣняются вдоль потока весьма медленно, такъ что уголъ такихъ струй (расхожденіе ихъ) весьма малъ, благодаря

чему является возможность пренебрегать составляющими скоростей и ускореній въ плоскости живыхъ сѣченій, т. е. считать, что скорости и ускоренія перпендикулярны къ живымъ сѣченіямъ. Такое движеніе (весьма близкое къ параллельно струйному) будемъ называть "медленно измѣняющимся" (*lentement variable; graduellement varié*). Этотъ частный случай имѣетъ огромное значеніе; онъ является почти единственно рассматриваемымъ при современномъ развитіи науки въ цѣломъ рядѣ отдѣловъ гидравлики.

Для этого случая, между прочимъ, нетрудно показать, что распредѣленіе давленій въ живыхъ сѣченіяхъ слѣдуетъ гидростатическому закону, т. е. такое же точно, какъ имѣло бы мѣсто, если бы жидкость была неподвижной.

Это легко доказывается на основаніи самихъ общихъ положеній динамики системы.

Дѣйствительно, въ любой системѣ матеріальныхъ точекъ мы можемъ рассматривать каждую изъ этихъ точекъ, какъ свободную и составить для нея уравненіе движенія, какъ для свободной матеріальной точки, прибавляя къ дѣйствующимъ на данную точку силамъ еще, такъ называемыя, силы связи.

Вводя, кромѣ того, въ случай движенія, согласно принципу D'Alembert'a, силы инерціи и тѣмъ самымъ сводя случай движенія къ случаю равновѣсія получаемъ систему уравненій для какой либо точки, въ какомъ либо направленіи:

Для случая равновѣсія

$$S_i + S'_i = 0$$

Для случая движенія

$$S_i + S'_i - m_i s_i'' = 0$$

гдѣ S_i и S'_i проекція на направленіе равнодѣйствующихъ внешнихъ силъ и силъ связей, дѣйствующихъ на точку i , а s_i'' ея ускореніе въ направленіи S . Для всей системы, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (S_i + S'_i) = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n+1} (S_i + S'_i - m_i s_i^2) = 0 \quad (*)$$

Изъ уравненій (*) непосредственно слѣдуетъ, что если для какой либо точки въ какомъ либо направленіи ускоренія, а вмѣстѣ съ нимъ и силы инерціи отсутствуютъ, то силы связи въ этомъ направленіи въ случаѣ движенія одинаковы съ силами связей въ случаѣ равновѣсія. Въ жидкости силами связи является давленіе между частицами. Для медленно измѣняющагося движенія въ плоскости живого сѣченія, согласно опредѣленію ускоренія равны 0, слѣдовательно распредѣленіе силъ связей (въ данномъ случаѣ давленій) по сѣченію ничѣмъ не отличается отъ случая равновѣсія, т.е. слѣдуетъ гидростатическому закону.

Очевидно, (фиг. 42) что во всѣхъ точкахъ живого сѣченія пьезометрическая высота $z + \frac{p}{\gamma}$ будетъ одинакова, и что слѣдовательно безразлично, въ какой точкѣ контура приставить пьезометръ для измѣренія ея величины. Выраженіе (23) въ этомъ случаѣ, очевидно, приметъ видъ:

$$\gamma \left(q(z + \frac{p}{\gamma}) \right) = \gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

гдѣ сумма членовъ, стоящая въ скобкахъ, постоянна.

III. Для рѣшенія вопроса необходимо еще сложить всѣ работы силъ сопротивленій для отдѣльныхъ струекъ.

Такъ какъ пьезометрическая высота для всѣхъ точекъ сѣченія одинакова, то должна быть одинакова и потеря напора, т.е. каждую изъ элементарныхъ работъ можно представить въ видѣ

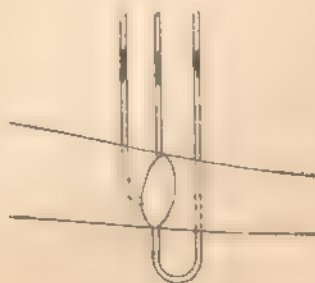
$$R_i = \gamma q_i h_w$$

полная работа силъ сопротивленія будетъ

$$R_w = \sum \gamma q_i h_w = \gamma Q h_w$$

Теперь, послѣ всей этой подготовительной работы, мы, наконецъ, можемъ подойти къ рѣшенію поставленнаго вопроса. Складывая члены получаемъ уравненіе живыхъ силъ для всего потока въ видѣ:

фиг. 42.



$$\gamma Q \frac{\alpha U_2^2}{2g} + \gamma Q \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \gamma Q \frac{\alpha U_1^2}{2g} - \gamma Q \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \gamma Q h_w$$

или по сокращеніи на γQ

$$\frac{\alpha U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{\alpha U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - h_w \quad (24)$$

Это и есть уравненіе Вернулли для цѣлаго потока, отличающееся отъ (20) лишь тѣмъ, что вмѣсто скорости и отдельной струйки въ него входятъ средняя скорость по сѣченію U , умноженная притомъ на коэффициентъ α , зависящій отъ распределе- нія скоростей.

Напомнимъ еще разъ, что въ то время какъ уравненіе (22) применимо къ струйкѣ всякаго вида и формы, уравненіе (24) мы можемъ примѣнять лишь къ такимъ двумъ сѣченіямъ 1 и 2, движе- нія въблизи которыхъ удовлетворяетъ условіямъ медленной измѣ- няемости. На пути между этими сѣченіями движеніе можетъ и не удовлетворять этимъ условіямъ.

Такъ на фиг. 43 уравненіе (24) можно примѣнять къ сѣче- ніямъ 1 и 2, но отнюдь нельзя, скажемъ, къ сѣченіямъ 1 и 3. Такимъ образомъ уравненіе (24) въ общемъ случаѣ можетъ быть примѣнено лишь къ определеннымъ, отстоящимъ на конечномъ раз- стояніи, сѣченіямъ.

Ему, вообще говоря, нельзя придать (подобно 19^{bis}) дифференціальную форму

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha U^2}{2g} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\gamma} \right) + \frac{dz}{ds} = - \frac{d}{ds} h_w \quad (24^{\text{bis}})$$

Fig. 43.



Лишь въ томъ слу- чаѣ, если движеніе на всемъ пути между 1 и 2 удовлетворяетъ услови- ямъ медленной измѣняе- мости, уравненіе (24^{bis}) можетъ быть примѣнено на всемъ протяженіи. Въ этомъ случаѣ снова, какъ (C')

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} = -\frac{dh_w}{ds} = -i_n$$

Отрицательная величина наклона напорной линии $-\frac{dh_w}{ds} = -i_n$ есть в этом случае мера рассеяния удельной энергии для всего потока в целом.

Принимая еще во внимание, что $-\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = i_p$ где i_p - пьезометрический уклон.

Имеем

$$i_p = \frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right) + \frac{d}{ds}(h_w) \quad . \quad . \quad (25)$$

Уравнение (25) есть основное уравнение неравномерного медленно изменяющегося движения; в случае открытого русла линия пьезометрических высот есть линия свободной поверхности, таким образом

$$i_p = i$$

т.е. пьезометрический уклон есть уклон свободной поверхности водотока.

25. Основное уравнение неустановившегося одномерного движения жидкости.

Разсмотрим теперь еще как видоизменяется уравнение Бернулли для случая неустановившегося, переменного по времени, движения. При этом ограничимся рассмотрением движения потока, заключенного в неизменяющиеся (жесткие) стенки; в этом случае величина живых сечений не изменяется по времени; поэтому в каждый данный момент через все сечения протекает одинаковый расход Q .

Начало непрерывности дает для каждого сечения:



$$U = \frac{Q}{\omega} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Кроме времени средняя скорость зависит лишь от площади живого сечения, т.е. от одной координаты S . В силу этого такое движение можно назвать одномерным. Полная

производная отъ скорости по времени

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$$

Будемъ предполагать, что благодаря жесткой стѣнкѣ не измѣняется по времени не только конфигурація всего потока въ цѣломъ, но также видъ и размѣры отдѣльныхъ струекъ.

Разсмотримъ перемѣщеніе за промежутокъ времени Δt элементарной струйки (фиг. 30 стр. 42) изъ положенія АВ въ положеніе А'В' и применимъ законъ живыхъ силъ на этомъ перемѣщеніи, предполагая движеніе неустановившимся.

Для составленія полного измѣненія живой силы отсѣка къ выраженію (21) надо будетъ теперь прибавить членъ, выражающій измѣненіе по времени (за промежутокъ Δt) живой силы, заключенной въ отсѣкѣ АВ.

Живая сила, заключенная въ отсѣкѣ АВ, равна, очевидно,

$$W_1 = \int_V \frac{\gamma}{g} \left(\alpha \frac{U^2}{2} + \frac{1}{2} g \int_0^z \omega dz \right) = \frac{\gamma}{g} \frac{1}{2} \int_0^z \omega dz$$

Измѣненіе живой силы за элементъ времени Δt :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma}{g} \frac{1}{2} \int_0^z \omega dz \right) \Delta t = \left(\frac{\gamma}{g} \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} \int_0^z dz \right) \Delta t$$

Величина $\int_0^z \omega dz$, очевидно, не зависитъ отъ времени и

для данной струйки является постоянной величиной, имѣющей измѣненіе обратное длинѣ. Составляя снова общее выраженіе закона живыхъ силъ, подобно (II); добавляя выраженіе (В) работы силъ сопротивленій, именно:

$$\gamma q \Delta t \left(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} \right) + \frac{\gamma q}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \int_0^z \omega dz \Delta t = \gamma q \Delta t (z_1 - z_2) + q \Delta t (p_1 - p_2) - \gamma q \Delta t h_n$$

дѣля на $\gamma q \Delta t$, т.е. относя къ единицѣ вѣса и разнося члены, имѣемъ

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \int_0^z \omega dz - h_n \quad (26)$$

Очевидно, что членъ $\frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \int_0^z \omega dz$ измѣряетъ относенное къ единицѣ вѣса протекающей жидкости измѣненіе по времени ки-

метической энергии въ отсѣкѣ А-В.

Въ дифференціальной формѣ уравненіе (26) можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{dw}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{u^2}{2g} = - \frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{1}{\omega} = - \frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (26^{bis})$$

Въ случаѣ, если движеніе медленно измѣняющееся, уравненіе, подобно (26)^{bis} можетъ быть написано и для излага потока. Для этого необходимо (см. § 24), умноживъ всѣ члены уравненія (26)^{bis} на $d\omega$, проинтегрировать полученное выраженіе въ пределахъ всего сѣченія и результатъ, затѣмъ, раздѣлить на ω .

Проведя подобную операцію надъ послѣднимъ членомъ, получаемъ:

$$\frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{g} \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega \right] = - \frac{1}{g} \int_{\omega} \frac{\partial g}{\partial t} = - \frac{1}{\omega g} \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Для другихъ членовъ переходъ отъ отдѣльной струйки ко всему сѣченію, уже рассмотрѣнъ въ параграфѣ 24.

Такимъ образомъ вмѣсто ур-нія (24)^{bis} получаемъ для медленно измѣняющагося неустановившагося движенія:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\alpha H^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\alpha z}{\alpha s} = - \frac{d}{ds} h_w - \frac{1}{g} \frac{\partial H}{\partial t}$$

вмѣсто (24)

$$\frac{\alpha H^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = h_w + \frac{\alpha H^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + h_w + \frac{1}{g} \int \frac{\partial H}{\partial t} d\omega$$

при этомъ послѣдній членъ можетъ быть переписанъ въ видѣ:

$$\frac{1}{g} \int \frac{\partial H}{\partial t} d\omega = \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int \frac{d\omega}{\omega}$$

Вмѣсто ур-нія (25) получимъ

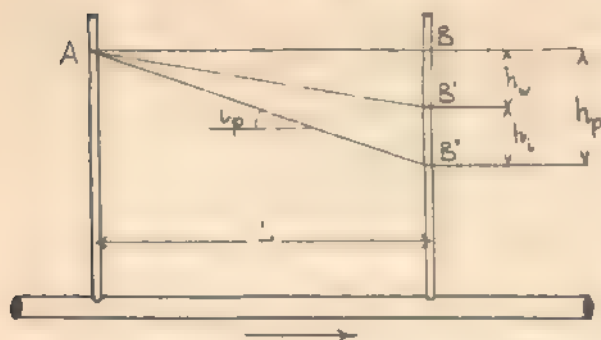
$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\alpha H^2}{2g} \right) + \frac{d}{ds} h_w + \frac{1}{g} \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \quad . \quad (26)$$

Уравненіе (26) представляетъ основное ур-іе неустановившагося медленно измѣняющагося одноразмѣрнаго движенія жидкости.

П р и м ѣ р ѣ : Для примѣра рассмотримъ движеніе въ прямой цилиндрической трубкѣ длин l . Въ этомъ случаѣ, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\alpha U^2}{2g} \right) = 0; \quad \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{L}{\omega} = \frac{L}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

рис. 44.



Такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что для цилиндрической тру-

бы, кромѣ того $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt}$ колбовое паденіе напора h_w

$$h_p = h_w + \frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = h_w + h_v$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что для медленно измѣняющагося движенія общія соотношенія, выражающія связь между скоростью и пьезометрической высотой въ данномъ сѣченіи, имѣютъ сравнительно простое выраженіе.

Въ случаяхъ, когда движеніе не медленно измѣняющееся, не удастся обойтись столь простыми средствами. Правда уравненіе Бернулли и здѣсь справедливо для отдѣльной струйки, но пьезометрическая высота уже не одинакова по всему сѣченію и слѣдовательно, чтобы примѣнить уравненіе надо знать напередъ распредѣленіе давленій либо скоростей по всему сѣченію.

Такимъ образомъ, здѣсь приходится вернуться къ основной и самой общей задачѣ механики жидкаго тѣла, а именно ко вопросу о нахожденіи всѣхъ обстоятельствъ движенія (полной картины распредѣленія давленія и скоростей) потока жидкости отъ данной системы его силъ.

Рѣшеніе этой задачи составляетъ предметъ гидравлики. Изложеніе послѣдней, вообще говоря, не входитъ въ задачи настоящаго курса.

Мы ограничимся поэтому здѣсь лишь самымъ краткимъ изложеніемъ ея основъ, безъ которыхъ было бы затруднительно пониманіе нѣкоторыхъ вопросовъ въ послѣдующемъ.

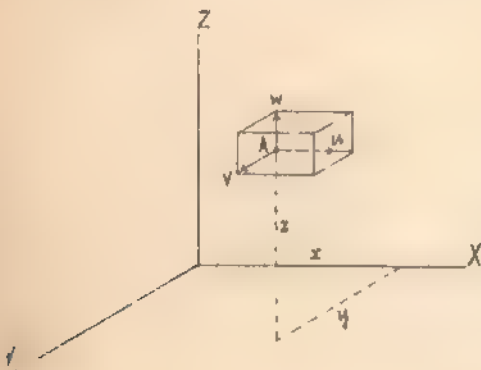
Г л а в а III.

ОСНОВНЫЯ УРАВНЕНІЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

26. Гидродинамическія уравненія Эйлера.

Общія уравненія движенія идеальной жидкости получаются изъ общихъ уравненій равновѣсія (3) добавленіемъ къ дѣйствующимъ силамъ силъ инерціи. На фиг. (45) скорость въ точкѣ А

фиг. 45.



обозначимъ U и проекціи ея на координатныя оси обозначимъ соответственно u, v, w .

Тогда составляющія силъ инерціи по координатнымъ осямъ, дѣйствующихъ на массу заключенную въ элементарномъ параллелепипедѣ, условія равновѣсія котораго мы рассмотримъ въ глр. 8, будутъ равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} & - \rho dx dy dz \frac{du}{dt} \\ & - \rho dx dy dz \frac{dv}{dt} \\ & - \rho dx dy dz \frac{dw}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

Прибавляя эти выраженія къ уравненіямъ (3) и сокращая на $dx dy dz$, получаемъ вмѣсто системы уравненій (3) систему:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = q_x - \frac{du}{dt}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = q_y - \frac{dv}{dt}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = q_z - \frac{dw}{dt} \quad \dots (27)$$

Величины $\frac{du}{dt}$; $\frac{dv}{dt}$; $\frac{dw}{dt}$ являются мѣрой полного измѣненія составляющихъ скоростей по времени.

Скорость, какъ было показано выше, является функцией, какъ времени, такъ и координатъ и потому измѣненіе скорости du вообще выражается черезъ

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Въ силу этого:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

а такъ какъ въ свою очередь:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Подобныя же выраженія могутъ быть составлены и для выраженія полныхъ ускореній и по другимъ осямъ. Такимъ образомъ уравненія (27) могутъ быть переписаны въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (27bis)$$

Эти уравненія даны Эйлеромъ въ 1755 году; (Hist. de l'Ac. de Berlin) они носятъ его имя и представляютъ самый общій случай уравненій движенія идеальной жидкости.

Къ системѣ ур-ній (27bis) необходимо еще прибавить уравненіе, выражающее состояніе массы внутри рассматриваемого объема движущейся жидкости.

Уравненіе это и называется обыкновенно "уравненіемъ непре-

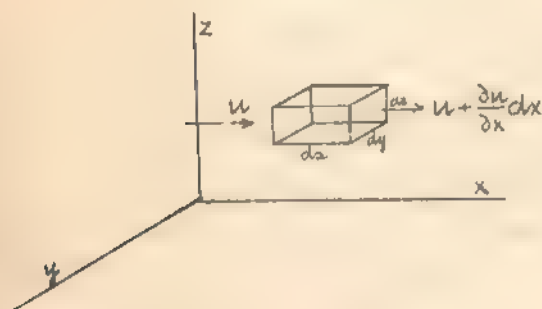
ренности", такъ какъ оно имѣетъ цѣлью характеризовать непрерывное распространение массы, отсутствіе пустотъ въ жидкомъ тѣлѣ.

Для капельно жидкаго тѣла, постоянной плотности условіе непрерывности формулируется въ высшей степени просто. Очевидно, внутри любого постояннаго замкнутаго объема масса жидкости должна оставаться неизмѣнной; количество втекающей въ извѣстный промежутокъ времени въ такой объемъ жидкости равно объему жидкости, вытекающей изъ него за тотъ же промежутокъ времени. Общій потокъ черезъ всю поверхность выдѣленнаго объема долженъ быть равенъ нулю.

Выдѣляя, въ качествѣ разсматриваемаго объема, элементарный параллелепипедъ (фиг. 48) со сторонами dx, dy, dz ; и составляя выраженіе потока черезъ стѣнки перпендикулярныя къ оси X получимъ соответственно:

$$-(dydz)u \quad \text{и} \quad +(dydz)(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$$

фиг. 48.



причемъ положительнымъ мы считаемъ потокъ направленный изъ объема, отрицательнымъ - внутрь его. Результирующий потокъ черезъ разсматриваемыя площадки, очевидно, равенъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz$$

Подобныя же выраженія могутъ быть составлены попарно и для другихъ площадокъ, перпендикулярныхъ осямъ y и z .

$$\frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz$$

Полный потокъ черезъ всю поверхность долженъ быть равенъ нулю; складывая полученные выше выраженія для результирующихъ потока черезъ всѣ грани параллелепипеда и сокращая на $dx dy dz$, получаемъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad (28)$$

Это и есть уравненіе непрерывности для жидкости.

Уравненіе (27) и (28) заключаютъ четыре неизвѣстныхъ

u, v, w и φ . Ихъ интегрированіе, при данной системѣ силъ q_i , должно дать значеніе этихъ величинъ, какъ функцій отъ времени и координатъ, т.е. дать рѣшеніе поставленной основной задачи. Произвольныя постоянныя, входящія въ интегралы, должны быть при этомъ опредѣлены по условіямъ на границахъ, либо по начальнымъ условіямъ движенія.

Однако, математика до настоящаго времени еще не дала рѣшеній совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій въ общей формѣ.

Такимъ образомъ основная задача гидродинамики не можетъ быть рѣшена въ общей формѣ благодаря отсутствію соответственнаго математическаго аппарата.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, однако, уравненія приводятъ къ ряду крайне важныхъ и полезныхъ обобщеній. Къ такимъ, наприимѣръ, относится случай, такъ называемаго, "безвихревого" движенія, или движенія съ потенциаломъ скоростей.

27. Случай "безвихревого" движенія идеальной жидкости.

1. Представимъ себѣ, что движеніе потока, находящагося подъ дѣйствіемъ системы силъ, имѣющей потенциалъ, таково, что составляющая скорости въ любой точкѣ по любому направленію n можетъ быть выражена, какъ частная производная по этому направленію отъ нѣкоторой функціи $\varphi(x, y, z, t)$, т.е. что

$$U \cos(U, n) = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

Очевидно, въ этомъ случаѣ:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} ; \dots \dots \dots (a)$$

Ограничимъ при этомъ наше разсужденіе случаемъ установившагося движенія; въ этомъ случаѣ φ является уже лишь функціей однихъ координатъ и

$$d\varphi = udx + vdy + wdz \dots \dots \dots (29)$$

Движеніе, удовлетворяющее указаннымъ выше условіямъ называется движеніемъ съ потенциаломъ скоростей и функція φ

носіть названіє *поменціала скороостей*.

Виразеніє (20) єсть полный дифференціалъ функціи Φ . При этомъ, какъ извѣстно, имѣють мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} ; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \quad . \quad (b)$$

Условія эти, впрочемъ, непосредственно слѣдуютъ также изъ опредѣленія (a). Мы впоследствии укажемъ физическій смыслъ соотношеній (b); теперь же вернемся къ общимъ уравненіямъ (27^{bis}) и (28). Первое изъ нихъ, уравненіє (27^{bis}), принимая во вниманіє (a), переписываемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (c)$$

Лѣвая часть выраженія єсть ничто иное, какъ

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

Называя U -силовую функцію силъ, дѣйствующихъ на потокъ, такъ что

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = q_x dx + q_y dy + q_z dz$$

можемъ правую часть уравненія выразить въ видѣ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right)$$

Такимъ образомъ уравненіє (c) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \quad . \quad . \quad (d)$$

Совершенно такимъ же способомъ второе и третье уравненіє (27^{bis}) приводятся къ виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad (d^{bis})$$

Откуда слѣдуетъ, что для рассматриваемаго случая движенія съ

потенціаломъ скоростей, вообще говоря

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\gamma} - U = \text{const}$$

или замѣняя q черезъ $\frac{V}{g}$ и дѣля на q .

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g} = E = \text{const} \quad (30)$$

Уравненіе непрерывности (28) при этомъ получаетъ видъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

физическій смыслъ уравненія (30) слѣдующій ($\frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g}$)*) есть мѣра потенциальной, $\frac{V^2}{2g}$ — мѣра кинетической энергіи, заключенной въ единицѣ вѣса жидкости; сумма этихъ членовъ, величина E — полная удѣльная энергія.

Уравненіе (30) такимъ образомъ гласитъ, что при движеніи идеальной жидкости повсюду дѣйствіемъ системы силъ, имѣющихъ потенциалъ, "удѣльная" энергія во всемъ потокѣ одинакова, т.е. имѣетъ мѣсто равномерное распредѣленіе энергіи во всемъ объемѣ движущейся жидкости.

Если примѣнить уравненіе (30) къ движенію тяжелой жидкости, то направляя ось Z вертикально кверху, имѣемъ:

$$dU = -qdz \quad ; \quad U = -qz + C$$

подставляя въ уравненіе (30), получаемъ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = E = \text{const.} \quad . \quad . \quad (31)$$

т.е. уравненіе подобное уравненію Бернулли (19) для идеальной жидкости.

Разница, однако между этими уравненіями въ томъ, что уравненіе Бернулли примѣнимо лишь къ отдельной струйкѣ и свидѣтельствуетъ о постоянствѣ удѣльной энергіи лишь въ предѣлахъ той или иной струйки; за то оно примѣнимо къ устано-

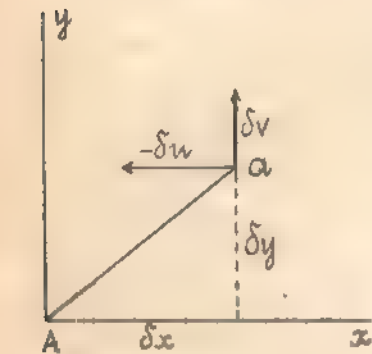
*) Какъ известно изъ механики — U , т.е. скалярная функція съ обратнымъ знакомъ, носитъ названіе потенциальной функціи или потенциала системы силъ.

ывшемуся движению идеальной жидкости во всех случаях независимо от того, имеется ли или нет потенциал скоростей.

Наоборот, применение уравнения (31) ограничено условием (а), т.е. наличием потенциала скоростей; при этом сохраняется постоянство содержания энергии уже во всем объеме движущейся жидкости. Тем самым, если известно распределение скоростей в пределах потока, то определяется само собой распределение давлений и наоборот.

2. Выясним теперь физический смысл уравнений (б)

рис. 47.



Представим себе, что вблизи точки А жидкость вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ζ . В этом случае составляющие относительных скоростей по отношению к А для какой-либо точки а (с координатами δx и δy) будут соответственно $\delta u = -\zeta \delta y$

$$\text{и } \delta v = \zeta \delta x$$

откуда имеем

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right)$$

Умножая δx и δy и переходя к пределу, получаем, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\zeta, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2\eta, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 2\zeta \quad (в)$$

т.е. что выражения $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ и т.д. представляют собой

удвоенные угловые скорости вращения вокруг координатных осей частиц соседних точек А.

Вектор W - геометрическая сумма векторов ζ, η, ζ отложенных по соответственным осям, изображает по величине и направлению полную угловую скорость вращения частиц вокруг точки А. Вектор этот, тем самым характеризующий вращательное движение вблизи точки А, носит название *вихря* в точке А.

Сопоставляя условия (а) с (б) приходим к заключению, что условия (б) равносильны условию

$$\zeta = \eta = \zeta = 0 \quad \text{или} \quad W = 0 \quad . \quad . \quad (f)$$

Такимъ образомъ, условія существованія потенціала скоростей въ некоторомъ потокѣ равносильно съ отсутствіемъ въ немъ вихрей. Движеніе это потому называютъ также "безвихре-
вымъ". Обратно, если въ потокѣ имѣются вращенія, вихри, то та-
кое движеніе уже не можетъ имѣть потенціала скоростей.

Слѣдовательно, равномерное распредѣленіе энергіи въ сре-
дѣ движущейся идеальной жидкости будетъ имѣть мѣсто лишь въ
томъ случаѣ, если во всей средѣ жидкости не имѣется вращеній
вихрей; при существованіи вихрей постоянство энергіи будетъ
имѣть мѣсто уже лишь вдоль струй, т.е. дѣйствительныхъ тра-
екторій частицъ.

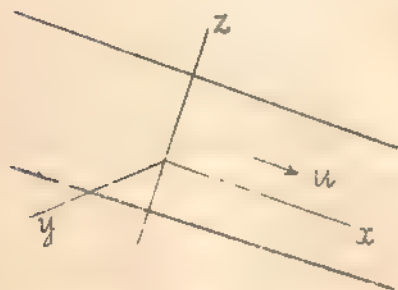
въ гидродинамикѣ, при этомъ, доказывается (при чемъ при-
водимое положеніе распространяется и на случай неустановив-
шагося движенія), что если въ какой либо моментъ движеніе
идеальной жидкости подѣ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ
обладаетъ потенціаломъ скоростей, то таковой сохраняется и
впредь во все время движенія. Другими словами, безвихревое
движеніе не можетъ перейти въ вихревое подѣ дѣйствіемъ силъ,
имѣющихъ потенціалъ; вихри могутъ возникнуть лишь подѣ дѣй-
ствіемъ силъ потенціала не имѣющихъ, къ каковымъ, напримѣръ,
принадлежатъ силы тренія.

Обратно, разъ возникшій вихрь въ идеальной жидкости не
можетъ уничтожиться и т.д.

Мы ограничимся вышеизложеннымъ, отсылая интересующихся
для дальнѣйшаго ознакомленія съ предметомъ къ специальнымъ
курсамъ гидродинамики.

П р и м ѣ р ы : 1) Приводимъ нѣсколько простѣйшихъ при-
мѣровъ безвихревого движенія жидкости.

а) Прямолинейное, равномерное движеніе въ цилиндриче-
ской трубѣ или каналѣ (фиг. 48).



Ось x расположимъ вдоль оси тру-
бы; очевидно, скорости пара-
лельны оси x ; величины V и W и
ихъ производныя по координатамъ
повсюду равны 0.

Изъ условій (f) по сопоста-
вленію съ (e) непосредственно
слѣдуетъ, что въ виду этого и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

должны быть равны нулю.

Такимъ образомъ, въ безвихревомъ движеніи скорости по всему сѣченію должны быть одинаковыми.

2) Рассмотримъ еще случай установившагося плоскаго безвихревого движенія жидкости, вращающейся вокругъ оси Z .

Для разсмотрѣнія вопроса удобнѣе перейти къ полярнымъ

фиг. 49.

координатамъ r и φ ; соответственно координаты и скорости точки выразятся черезъ:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \\ u &= \frac{dx}{dt} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi' & \dots & (A) \\ v &= \frac{dy}{dt} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi' \end{aligned}$$

гдѣ r' составляющая скорости по радиусу; $r \varphi' = c$ вращательная скорость. Въ частности въ разсматриваемомъ нами случаѣ $c = 0$ и

$$u = -c \sin \varphi; \quad v = c \cos \varphi \quad \dots \quad (B)$$

Такъ какъ кромѣ того:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos^2 \varphi}{x} = +\frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned} \quad (C)$$

Условія безвихревого движенія въ плоскости xy

$$Z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

приобрѣтаетъ видъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Подставляя, соответственно (B) и (C) получаемъ:

$$Z = \cos^2 \varphi \frac{\partial c}{\partial r} + \sin^2 \varphi \frac{c}{r} + \sin^2 \varphi \frac{\partial c}{\partial r} + \cos^2 \varphi \frac{c}{r} = 0$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{c}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial c}{\partial r} r + c \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c r) = 0$$

Откуда

$$cr = \text{const}$$

т.е. произведение изъ радіуса вектора и вращательной скорости есть величина постоянная.

Очевидно, скорость вблизи оси дѣлается очень большой; давленіе падаетъ; этимъ и объясняется стремленіе къ образованію воронокъ, часто наблюдаемое на поверхности водоемовъ при вращательномъ движеніи жидкости.

3) При разсмотрѣніи вопросовъ безвихревого движенія идеальной жидкости обычно исходятъ изъ уравненія непрерывности

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Вопросъ сводится къ нахожденію нѣкоторой функціи φ , удовлетворяющей ур-нію (32) и даннымъ условіямъ на границахъ.

Сравнительно много рѣшеній получено для случая плоскаго движенія, для котораго ур-ніе (32) пріобрѣтаетъ видъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

дифференціальное уравненіе, которому, какъ извѣстно, удовлетворяетъ любая аналитическая функція комплекснаго переменнаго. Рѣшеніе задачи позволяетъ построить линіи тока (траекторіи), найти величину скоростей, а, слѣдовательно, и давленій, т.е. изобразить полностью картину движенія.

Полученная такимъ образомъ картина движенія для идеальной жидкости въ нѣкоторыхъ случаяхъ близка къ дѣйствительности, т.е. можетъ служить для изображенія движенія вязкой жидкости.

Подобнаго рода случай, напр., представляется всякій разъ, когда дѣйствіе силъ вязкости не успѣло еще въ достаточной мѣрѣ проявиться и сколько-нибудь значительно видоизмѣнить картину потенціальнаго движенія; примѣромъ можетъ служить хотя бы явленіе истеченія покоящейся жидкости черезъ несольшое отверстіе въ тонкой стѣнкѣ (см. II часть). Мы еще вернемся къ этому вопросу впоследствии; теперь же перейдемъ къ разсмотрѣнію сопротивленій, имѣющихъ мѣсто при движеніи реальной жидкости.

Г л а в а IV.

О СОПРОТИВЛЕНІЯХЪ.

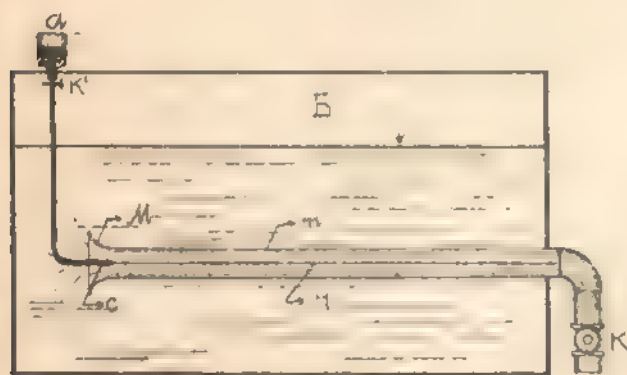
28. Два рода движенія вязкой жидкости.

Величины и свойства сопротивленій, проявляющихся въ дви-
жущейся вязкой жидкости существенно разнятся въ зависимости
отъ того, въ какомъ состояніи находится движеніе въ "струй-
чатомъ" или "беспорядочномъ".

Хотя это различіе въ той или иной мѣрѣ сознавалось гид-
равликами еще съ начала XIX стол., тѣмъ не менѣе окончательно
выяснить всѣ обстоятельства дѣла удалось лишь въ началѣ вось-
мидесятыхъ годовъ англичанину Reynolds'у (Phil Trans. R. S. 1883
см. также Collected papers т II) при этомъ посредствомъ слѣдую-
щаго необыкновеннаго простаго и нагляднаго опыта^{*)}.

Бакъ со стеклянными стѣнками наполненъ водой. Въ бакѣ
установлена стеклянная трубка, снабженная съ одной стороны
бака мундштукомъ М съ другой краномъ К, посредствомъ кото-
раго можно регулировать вытеканіе воды, а тѣмъ самымъ и ско-
рость воды въ трубкѣ. Надъ бакомъ установленъ сосудикъ а съ

фиг. 50.



растворомъ ани-
линовой краски;
краномъ К' мож-
но регулировать
притокъ краски
въ устье трубки
черезъ сопло С.

Если посте-
пенно открывая
кранъ К, заста-
вить воду вы-
текать черезъ

трубку т и одновременно пускать краску, то будетъ происходить
слѣдующее:

^{*)} Приборъ Reynolds'а воспроизведенъ въ Спб. Политехн. Инст.
изъ лабораторіи теченія проф. В. А. Кутузова.

Сначала, когда, благодаря малому открытію крана К, скорость въ трубѣ мала, вытекающая изъ сопла анилиновая краска образуетъ внутри движущейся жидкости устойчивую несмѣшивающуюся съ окружающей жидкостью рѣзко очерченную окрашенную нить - "струю" (Н).

Такимъ образомъ, наглядно демонстрируется существованіе внутри трубки "струйчатого" движенія жидкости. Если, открывая кранъ К, увеличивать скорость въ трубкѣ, то черезъ нѣкоторое время наступаетъ моментъ, когда струйчатое движеніе внезапно измѣняетъ свой характеръ. Струя анилина, до того времени тянувшаяся вдоль трубки въ видѣ устойчивой рѣзко очерченной нити, теперь непосредственно по выходѣ изъ сопла, теряетъ рѣзко очерченную свою форму, разбивается на рядъ отдѣльных, направленныхъ въ разныя стороны, крутящихся и колеблющихся, ежесекундно мѣняющихъ свой видъ и направленіе водоворотовъ; благодаря этому на самомъ короткомъ промежуткѣ краска перемѣшивается съ водой, образуя равномерно окрашенную струю.

Ясно, что здѣсь "струйчатого" движенія болѣе не существуетъ; наоборотъ, движеніе отдѣльных окрашенныхъ частей, вблизи выхода краски изъ сопла, гдѣ еще можно слѣдить хоть нѣсколько за внутреннимъ движеніемъ жидкости, наблюдать которое послѣ перемѣшиванія струй съ краской дѣлается, уже невозможнымъ, показываетъ, что здѣсь частицы двигаются то въ одномъ, то въ другомъ направленіи, какъ будто безъ какого либо опредѣленнаго порядка или закономерности. Этого рода движеніе, поэтому можно назвать "беспорядочнымъ" *).

Описанныя выше явленія являются далеко не единственнымъ примѣромъ такого "неупорядоченнаго" движенія частицъ. Такъ, напримѣръ, въ кинетической теоріи газовъ, отдѣльныя частицы газа также представляются движущимися безъ всякаго порядка и закономерн. внутри занимаемаго газомъ объема. При этомъ давленіе, производимое газомъ на стѣнку сосуда рассматривается какъ результатъ безчисленнаго числа отдѣльныхъ ударовъ, производимыхъ этими движущимися безъ всякаго порядка, во всѣхъ направленіяхъ газовыми частицами.

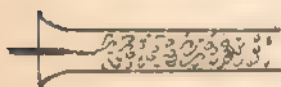
*) французы называютъ это tumultueux или turbulent (тумуль-булентнымъ) англичане - eddy или sinuous motion; немцы - Mischbewegung).

Однако, несмотря на произвольное направление движения каждой из частиц, именно благодаря безконечному разнообразію и множеству отдѣльных производимыхъ частицами ударовъ, является вѣроятность, что среднее число ударовъ за нѣкоторый промежутокъ времени на ту или иную часть стѣнки получается постояннымъ. Благодаря этому и поддерживается постоянное давленіе газа на стѣнку, которое и является тѣмъ самымъ постояннымъ "среднимъ, статистическимъ"*) результатомъ безчисленнаго множества, казалось бы, совершенно произвольныхъ, ничѣмъ не урегулированныхъ, не упорядоченныхъ проявленій.

Совершенно также, въ безпорядочномъ движеніи жидкости, хотя частицы ея летаютъ совершенно произвольно во всѣхъ направленіяхъ, сталкиваясь и отталкиваясь другъ отъ друга о наружную стѣнку, тѣмъ не менѣе какъ средній "статистическій" результатъ этихъ безчисленныхъ неупорядоченныхъ движеній мы получаемъ опять таки нѣкоторый "установившійся" потокъ частицъ черезъ ту или иную площадку внутри жидкости, выражающійся, хотя бы въ опытѣ Reynolds'a въ томъ, что при опредѣленномъ уровнѣ воды въ бакѣ и нѣкоторомъ открытіи крана К, черезъ трубу вытекаетъ въ отдѣльный промежутокъ времени всегда одно и то же количество жидкости.

Возвращаясь къ работамъ Reynolds'a прежде всего отиытимъ, что согласно опыту для трубы опредѣленнаго діаметра и при данной температурѣ воды нарушение "струйчатости" движенія и переходъ его въ "безпорядочное" происходитъ при одной и той же

Фиг. 57.



опредѣленной средней скорости въ трубѣ. Такимъ образомъ, наличие того или иного рода движенія обуславливается, при прочих

равныхъ условіяхъ, величиною скорости. То значеніе послѣдней,

*) Разсмотрѣніе подобнаго рода вопросовъ, связанныхъ съ примѣненіемъ теоріи вѣроятностей къ изслѣдованію движеній системъ молекулъ, относится къ области, такъ называемой, "статистической" механики. Терминъ "статистическій" установился, очевидно, по аналогіи съ "статистикой", также употребляемой, опираясь на "законъ большихъ чиселъ", для опредѣленія устойчивыхъ результатовъ многообразныхъ проявленій явленій социальныхъ, биологическихъ, антропологическихъ, и пр.

ростъ можно изобразить посредствомъ соотношенія

$$h_w = K u^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

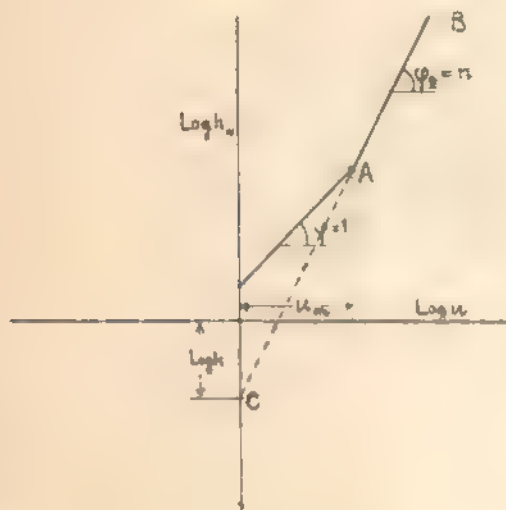
гдѣ K — нѣкоторый коэффициентъ, а n показатель степени, указывающій, пропорціонально какой степени скорости возрастаетъ потеря напора; логарифмируя выраженіе (33) получаемъ:

$$\log h_w = \log K + n \log u$$

Если по абсциссамъ откладывать $\log u$; а по ординатамъ $\log h_w$, то принимая во вниманіе, что $\log K$ есть постоянная, получаемъ уравненіе прямой линіи, угловой коэффициентъ которой есть n ; такимъ образомъ, показатель n въ уравненіи опредѣляется просто какъ тангенсъ угла φ наклона прямой.

Соотвѣтственно съ этимъ получаемъ слѣдующую картину измѣненія сопротивленій въ логарифмической шкалѣ. Для величинъ $u < u_k$ имѣемъ прямую, наклонную подъ угломъ 45° ($\tan \varphi = 1$; $n = 1$). Въ точкѣ $u = u_k$ прямая резко измѣняетъ свой уклонъ; значеніе $\tan \varphi$ приближается къ 2.

Фиг. 54.

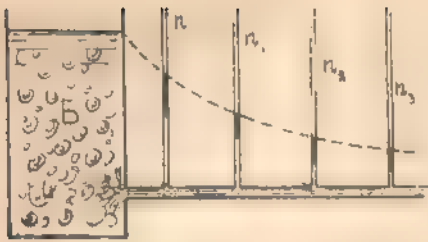


Строимъ діаграмму (фиг. 54) непосредственно по даннымъ опыта по уклону прямой AB узнаемъ величину показателя n , т.е. заключаемъ о томъ, какой степени скорости пропорціональна потеря напора. $\log K$ въ то же время измѣряется въ соотвѣтственномъ масштабѣ длиной отрезка OC на оси координатъ.

2. Какъ было указано выше, "критической" ска-

ростью Reynolds назвали ту скорость, при которой жидкость находящаяся первоначально въ бакѣ въ покое, при всмугленіи въ трубку проходитъ въ безпорядочное движеніе. Можно, однако, подойти къ вопросу съ иной точки зрѣнія. Пусть (фиг. 55) въ бакѣ B жидкость искусственно поддерживается въ безпорядочномъ движеніи. Можно задать вопросъ, не можетъ ли быть создано та-

Фиг. 55.



ких условий, при которых жидкость вступая из бака в трубку в состоянии беспорядочного движения переходит затем уже в самой трубке в движение струйчатое упорядоченное. Reynolds ответил опытом также и на этот вопрос. Уста-

новив в трубе ряд пьезометров и сопоставляя потери напора со скоростями воды в трубке, он пришел к заключению, что для данного диаметра трубы и температуры имеется опять таки некоторая скорость $U_{к_2}$, при которой имеющее место в начале трубы беспорядочное движение в дальнейшем как бы "успокаивается", переходя в струйчатое. Величину этой скорости $U_{к_2}$ мы будем называть "нижней критической скоростью" в противоположность $U_{к_1}$, которую будем именовать просто критической скоростью.

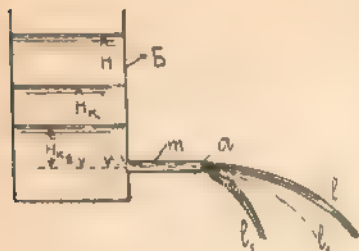
Последняя характеризует точку разрушения струйчатого движения, или, приняв терминологию Reynolds'a, скорость при которой, бывшее до того "устойчивым" (stable), движение перестает быть таковым и делается "неустойчивым". Очевидно, что выше этой скорости упорядоченное движение, вообще, невозможно. Обратно, нижняя критическая скорость $U_{к_2}$ характеризует скорость, ниже которой невозможно уже "неустойчивое" (беспорядочное) движение; даже если бы таковое было создано искусственным путем, то предоставленное самому себе движение приобрело бы устойчивость, сделавшись бы "струйчатым".

Между скоростями $U_{к_2}$ и $U_{к_1}$ лежит, очевидно, промежуточная область, в которой, вообще говоря, движение может быть как первого, так и второго рода, смотря по начальным обстоятельствам. Если вступая в такого рода промежуточную область, жидкость находится в устойчивом движении, то устойчивость не нарушается; зато не уничтожается и неустойчивость движения и жидкость, вступившая в промежуточную область в состоянии беспорядочного движения, продолжает в таком же пребывать. Следовательно, "струйчатое движение" в этой области, вообще говоря, неустойчиво; неустойчива также и величина сопротивления; действительно, здесь возможны промежуточные состояния со всевозможными степенями "беспорядочности" от чисто струйча-

таго движенія до движенія полностью безпорядочнаго и связаннаго съ послѣдними потери.

Интересный случай подобнаго рода неустойчивыхъ состояній

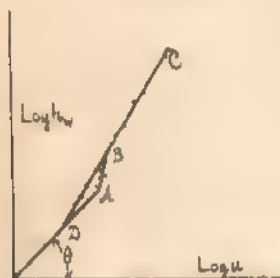
фиг. 58.



движенія служить слѣдующее явленіе, описанное впервые Couette'омъ. Жидкость вытекаетъ изъ бака Б черезъ трубку m; при этомъ оказывается слѣдующее: сперва, если напоръ H достаточно великъ, жидкость вытекаетъ вполне устойчивой струей c. Затѣмъ, когда напоръ понизится, скажемъ, до

нѣкотораго $H_{к1}$, истечение вдругъ дѣлается неустойчивымъ. Струя начинаетъ "бить", т.е. непрерывно колебаться. Далѣе, когда напоръ еще болѣе понизится, дойдя, скажемъ, до $H_{к2}$, струя снова приобретаетъ устойчивый характеръ. Очевидно, что скорость въ трубѣ при напорахъ $H > H_{к1}$ и $H < H_{к2}$ соответственно

фиг. 57



больше $u_{к1}$ и меньше $u_{к2}$, т.е. движеніе въ первомъ случаѣ безусловно безпорядочное оз устойчивой средней статистической скоростью, во второмъ случаѣ безусловно струйчатое. Между $H_{к1}$ и $H_{к2}$ скорость находится въ промежуточной области неустойчивыхъ состояній, что и объясняетъ непре-

станное измѣненіе ея величины и связанное съ этимъ біеніе струи.

Все вышесказанное хорошо иллюстрируется слѣдующей диаграммой, изображающей логарифмическую анаморфозу измѣненія сопротивленій въ свинцовой трубѣ и заимствованной мною изъ "Курса Гидраалики" Gibson'a. На фиг. 57 точки А и Б соответствуютъ нижней и верхней критической скорости.

3. Изъ соображеній разнѣрности^{*)} (пользуясь закономъ подобія) Reynolds пришелъ къ заключенію, что величина критической скорости прямо пропорціональна вязкости и обратно пропорціональна плотности и діаметру трубы.

Такимъ образомъ,

$$u_k = \frac{\kappa \eta}{\gamma d}$$

^{*)} См. В. А. Кирпичевъ. "Бесѣда о механикѣ". Стр. 185.

гдѣ η есть, такъ называемый, коэффициентъ вязкости жидкости (см. ниже), а K некоторый постоянный коэффициентъ, одинаковый для всѣхъ жидкостей. На основаніи своихъ опытовъ Reu-
olds далъ слѣдующія значенія постоянныхъ (приводимъ ихъ въ системѣ C.G.S. по Biel'а.*)

$$u_{кр_1} = \frac{1,29}{d} \frac{[\eta]}{\gamma}$$

$$u_{кр_2} = \frac{0,204}{d} \frac{[\eta]}{\gamma}$$

Для воды при температурѣ въ 12°C , выраженіе (для метри-
наго размѣра) приобретаетъ:

$$u_{кр_1} = \frac{0,016}{d}$$

$$u_{кр_2} = \frac{0,0025}{d}$$

Для трубъ различныхъ діаметровъ имѣемъ:

d	1 ^{'''} _m	5 ^{'''} _m	10 ^{'''} _m	25 ^{'''} _m	50 ^{'''} _m	0,1 m	0,2 m	0,5 m	1 m
$u_{кр_1}^{'''}$	16	3,2	1,6	0,64	0,32	0,16	0,08	0,032	0,016
$u_{кр_2}^{'''}$	2,5	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,012	0,005	0,0025

Такимъ образомъ, мы видимъ, что для размѣровъ трубъ упо-
требляемыхъ на практикѣ, скорости для воды очень малы и мно-
го ниже общно примѣняемыхъ на практикѣ скоростей. И въ дру-
гихъ случаяхъ практики при движеніи воды мы имѣемъ дѣло поч-
ти исключительно съ безпорядочнымъ движеніемъ. Относящіяся къ
нему сопротивленія повтому почти исключительно и изучаются
въ практической гидравликѣ.

Однако для другихъ жидкостей можно и на практикѣ встрѣ-
титься со скоростями ниже критическихъ. Такого рода случай
можетъ представиться либо для жидкостей съ большимъ коэффиці-
ентомъ внутренняго тренія (масла, нефть и пр.) либо для жид-

*) B. Biel: "Über den Druckhöhenverlust bei der Fortlei-
tung tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

костей съ малой плотностью (газы). Действительно, въ выраже-
 ние $\nu_{кр}$ входитъ величина не абсолютной вязкости, а вязкости,
 дѣленной на плотность $\frac{\eta}{\rho}$; эта величина, напримѣръ, при 10°C
 для рѣпнаго масла въ 310, для атмосфернаго воздуха въ 11 разъ
 больше чѣмъ для воды; очевидно, соответственно больше и ско-
 рости въ таблицѣ (стр.80).

Опытъ Couette'a (An. de Ph. et ch. 1890) надъ треніемъ
 жидкости на поверхности вращающихся цилиндровъ подтвердилъ
 въ общемъ выводы Reynolds'a; онъ подтвердилъ, въ частности,
 и предположеніе его о постоянствѣ коэффициента K .

Biel, анализируя рядъ опытовъ другихъ изслѣдователей, при-
 ходитъ къ весьма правдоподобию заключенію, что величина кри-
 тической скорости нѣсколько измѣняется въ зависимости отъ
 шероховатости стѣнки. Крайне интересны также опыты проф.
 Barnes'a и Soker'a въ лабораторіи университета M'Gill въ Мон-
 реалѣ. Оказывается, что если протянуть черезъ трубку (фиг.58)
 проволоку π - π и нагрѣвать ее электрическимъ токомъ, то при
 струйчатомъ движеніи воды черезъ трубку со скоростью ниже
 критической, нагрѣваются лишь ближайшіе къ проволоцѣ слои;
 жидкость движется концентрическими слоями разной температуры,
 и самый чувствительный термометръ t , вставленный въ стѣнкѣ
 трубки, не обнаруживаетъ замѣтнаго повышенія температуры. На-
 оборотъ, какъ только скорость перейдетъ критическую и струй-
 чатость нарушится, благодаря перемѣшиванію происходитъ на-
 грѣваніе всей массы протекающей жидкости, что немедленно об-
 наруживается термометромъ t .

фиг. 58.



Такимъ образомъ, моментъ нарушенія струйчатости опредѣ-
 ляется термометрически. Повидимому методъ этотъ много точ-
 нѣе метода окрашенныхъ струй.

Судя по указанію Bovey (Hydraulics стр.131 изд.1909),

можно думать, что исследования канадских ученых, еще не законченные, прольют вообще много света на весь вопрос об "устойчивости" движения жидкости.

29. Сопротивленія въ струйчатомъ движеніи.

Въ струйчатомъ движеніи, судя по выведеннымъ до настоящаго времени даннымъ опыта, сопротивленія проявляются въ общемъ въ согласіи съ законами тренія жидкихъ тѣлъ, высказанными еще Ньютономъ (Principia, T. II).

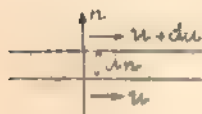
Согласно предположенію послѣдняго, сопротивленіе, проявляющееся при скользяніи одного слоя жидкости по другому, пропорціонально поверхности соприкасающихся площадей и скорости относительно скользянія.

Сопротивленіе не зависитъ отъ давленія и уменьшается съ возрастаніемъ температуры.

Какъ видимъ законы тренія жидкихъ тѣлъ совершенно противоположны законамъ тренія тѣлъ твердыхъ; треніе послѣднихъ прямо пропорціонально давленію и не зависитъ отъ площади, скорости и температуры.

Переходя къ численному выраженію законовъ движенія, замѣтимъ, что внутри движущейся жидкости относительная скорость скользянія по нѣкоторой площадкѣ, нормальной къ нѣкоторому направленію n измѣряется, очевидно, величиной

рис. 52.



Т. е. сила тренія на поверхности выражается черезъ

$$T = [\eta] F \frac{du}{dn}$$

гдѣ $[\eta]$ такъ называемый "коэффициентъ вязкости" или "коэффициентъ внутренняго тренія" жидкости. Коэффициентъ этотъ зависитъ отъ температуры и въ системѣ CGS выражаетъ силу тренія въ динахъ, приходящуюся на одинъ кв. сантиметръ поверхности, если движеніе таково, что два слоя жидкости, отстоящіе другъ отъ друга на одинъ сантиметръ, имѣютъ относительную скорость въ $\frac{1 \text{ cm}}{\text{sec}}$.

Если силу выражать в граммах, то, очевидно,

$$\eta = \frac{[\eta]}{98}$$

Величина внутреннего трения, вообще говоря, падает с температурой. Так для воды*) имеют:

$$[\eta] = \frac{0.01775}{1 + 0.0331t + 0.00024t^2}$$

В нижеследующей таблице (заимствованной у Biesl'a) приводим данные абсолютной величины коэффициента вязкости, а также так называемого "модуля вязкости" $\frac{[\eta]}{\gamma}$, т.е. коэффициента вязкости деленного на весь единицу объема.

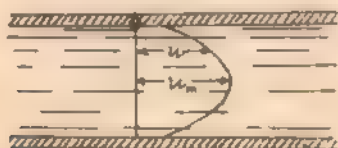
Т а б л и ц а

Температура	0°		10°		20°		30°	
	$[\eta]$	$\frac{[\eta]}{\gamma}$	$[\eta]$	$\frac{[\eta]}{\gamma}$	$[\eta]$	$\frac{[\eta]}{\gamma}$	$[\eta]$	$\frac{[\eta]}{\gamma}$
Вода	0,0177	0,0177	0,0131	0,0131	0,0101	0,0101	0,00805	0,00805
Рыбное масло	25,3	27,7	3,7	4,07	1,8	1,95	0,99	1,1
Атмосф. возд.	0,17140*	0,137	0,17610*	0,146	0,18810*	0,151	0,18610*	0,165
Ртуть					0,016	0,0118		

При струйчатом движении вязкой жидкости непосредственно прилегающий к стенке слой, повидимому, прилипает к последней; таким образом, скорость (v) по сечению (скажем трубу фиг. 60) непрерывно изменяется от нуля до u_{max} в центре сечения. У самой стенки первый движущийся слой скользит по неподвижному слою жидкости; величина трения у самой

фиг. 60.

стенки



$$T = F \eta \cdot \frac{du}{dr} \dots (34)$$

где значек $\frac{du}{dr}$ обозначает,

что градиент скорости взят непосредственно у

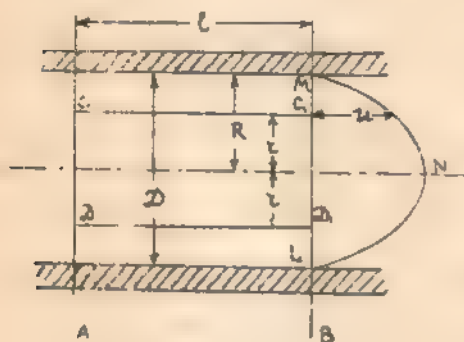
*) O. Meyer Nied. An. 1877. стр. 387.

стѣнки.

При этомъ сопротивленіе не зависитъ отъ матеріала, изъ котораго сдѣлана труба, такъ какъ непосредственно сама стѣнка въ механизмѣ сопротивленія не участвуетъ. Все это подтверждаются опытами надъ движеніемъ въ капиллярныхъ трубкахъ и вообще въ трубкахъ малаго діаметра, въ которыхъ легко осуществляется струйчатое движеніе благодаря значительной величинѣ критической скорости. Результаты подобныхъ опытовъ Poiseuille'я и др. хорошо совпадаютъ съ выводами теорій, построенной на указанныхъ выше предположеніяхъ о равенствѣ нулю скорости на стѣнкахъ и выраженіи тренія по формулѣ (34)*).

Представленія эти подтверждаютъ опыты Coulomb'a надъ катаніемъ дисковъ, а также опыты Couette'a надъ вращеніемъ цилиндровъ въ вязкой жидкости.

*) Соотношенія между потерей напора и расходомъ вязкой жидкости при струйчатомъ движеніи въ цилиндрической трубѣ получается весьма просто. Рассмотрим отрезокъ А В горизонтальной цилиндрической трубы длиной l , въ которомъ жидкость находится въ установившемся струйчатомъ движеніи.



Пусть $ММ'$ изображаетъ картину распределенія скоростей въ плоскости сеченія (скорости u изображены ординатой кривой отъ оси $ММ'$).

Очевидно, скорости симметричны относительно оси трубы и одинаковы на цилиндрической поверхности радиуса r . Выделимъ элементарный элементъ цилиндра $CC'DD'$ и составимъ уравненіе равновѣсія силъ, дѣствующихъ на него.

Давленія въ сеченіяхъ А и В соотвѣственно обозначимъ p_A и p_B ; разность ихъ $p_A - p_B = [\Delta p]$; $\frac{\Delta p}{l}$ есть, следовательно, потеря напора на участкѣ А-В : результирующая давленій:

$$\pi r^2 [\Delta p],$$

очевидно, уравновѣшивается вреніемъ на поверхности цилиндра.

Такимъ образомъ:

$$\pi r^2 [\Delta p] + 2\pi r l \eta \frac{du}{dr} = 0$$

30. Сопротивленія въ безпорядочномъ движеніи.

Свойства сопротивленій въ безпорядочномъ, турбулентномъ движеніи существенно разнятся отъ таковыхъ въ движеніи упорядоченномъ, струйчатомъ.

Прежде всего, какъ показываютъ опыты, сопротивленія пропорціональны приблизительно квадрату скорости; затѣмъ сопротивленія не зависятъ (по крайней мѣрѣ сколько-нибудь существенно) отъ температуры; наоборотъ, зависятъ отъ материала и

или

$$du = - \frac{[\Delta p] r}{2 \ell [\eta]} dr$$

Въ этой формулѣ $[\Delta p]$ также должно быть выражено (подобно $[\eta]$) въ динахъ на кв. см. Выразивъ Δp въ граммахъ, т. е. полагая

$$\Delta p = \frac{[\Delta p]}{981} \quad \text{и интегрируя, имеемъ:}$$

$$u = - \frac{\Delta p r^2}{4 \ell \eta} + \text{const.}$$

Полагая для $r=R$ $u=0$ имеемъ:

$$u = \frac{\Delta p}{4 \ell \eta} (R^2 - r^2)$$

для центральной струйки ($r=0$)

$$u_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4 \ell \eta}.$$

Такимъ образомъ, скорости распределяются по параболѣ.

Расходъ жидкости черезъ трубу:

$$Q = \int_0^R 2\pi r du = \frac{2\pi \Delta p}{4 \ell \eta} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{2 \ell \eta} \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \ell \eta}.$$

Средняя скорость

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8 \ell \eta}$$

Разницу давленій можно выразить черезъ пьезометрическую высоту $h_w = \frac{\Delta p}{\gamma}$, измеряемую непосредственно паденіемъ напора.

Тогда имеемъ:

$$U = \frac{h_w}{\ell} \cdot \frac{R^2}{8} \cdot \frac{\gamma}{\eta} = \frac{981}{8} \cdot \frac{R^2 h_w}{\ell} \cdot \frac{\gamma}{[\eta]}$$

или

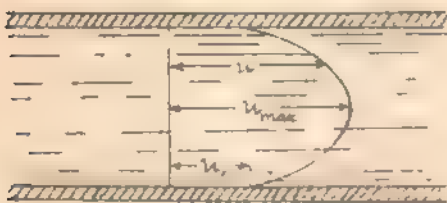
состоянія стѣнки; сопротивленія быстро возрастають съ увеличеніемъ неровности или, какъ обычно выражаются, "шероховатости" стѣнки.

Частицы жидкости ударяясь о выступы стѣнки отлетаютъ отъ нея въ различныхъ направленіяхъ, причемъ съ возрастаніемъ шероховатости стѣнки увеличивается число и разномасштабное возможныхъ ударовъ частицъ жидкости о выступы и неровности стѣнки.

Состояніе поверхности послѣдней, степень ея шероховатости является такимъ образомъ, повидимому, основной причиной, обуславливающей степень безпорядочности или такъ называемую интенсивность турбулентности движенія, хотя самый фактъ нарушения струйчатости и устойчивости движенія и возникновеніи безпорядочности вызывается причинами, не имѣющими непосредственнаго отношенія къ стѣнкѣ, и обуславливается самимъ существомъ природою вязкихъ жидкостей.

Независимо отъ того, существуетъ ли нѣтъ на стѣнкѣ неподвижный смазывающій ее и удерживаемый на ней силами сцепленія слой жидкости, все заставляетъ предполагать, что непосредственно у самой стѣнки, въ слой, непосредственно прилегающій къ указанному выше неподвижному слою, скорости имѣютъ конечное значеніе.

Фиг. 61.



Възъ такого представленія было бы трудно, съ одной стороны, объяснить вліяніе на сопротивленія шероховатости стѣнки, съ другой стороны — такое представленіе вполнѣ со-

гласуется съ общимъ представленіемъ о безпорядочномъ движеніи и находитъ подтвержденіе въ опредѣленіи непосредственно опытомъ значительныхъ скоростей у стѣнки, т.е. на такомъ вообще разстояніи отъ нея, на которомъ еще возможно установить

$$\frac{h_w}{l} = i_p = \frac{8}{981} \cdot \frac{[\eta]}{\gamma} \cdot \frac{U}{R^2},$$

гдѣ i_p — уклонъ пьезометрической линіи.

Соотношеніе это для капиллярныхъ трубокъ знаменитъ своимъ именемъ вліяніемъ Poiseuille'я.

измѣрительный приборъ.

Согласно общему представленію о беспорядочномъ движеніи мгновенная скорость въ данной точкѣ все время мѣняетъ свою величину и направленіе. Однако, средній "статистическій" результатъ движеній выражается въ томъ, что не только потокъ черезъ все сѣченіе, скажемъ, какой либо трубы, но и элементарный потокъ въ точкѣ А черезъ любую площадку сѣченіемъ $d\omega$, взятый для нѣкотораго конечнаго промежутка времени, остается неизмѣннымъ. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что въ каждой точкѣ остается постоянной и нѣкоторая "средняя" скорость, получаемая дѣленіемъ средняго постояннаго потока въ единицу времени q на сѣченіе площадки:

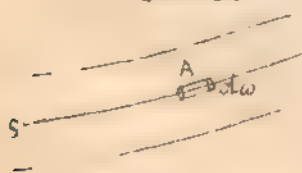
$$u_n = \frac{q}{d\omega}$$

Тѣмъ самымъ устанавливается понятіе о "средней статистической" скорости въ данной точкѣ, являющейся уже не дѣйствительной скоростью частицъ въ данной точкѣ, а лишь нѣкоторой фиктивной величиной, измѣряющей величину и направленіе средняго потока частицъ въ данной точкѣ.

Обертка такого рода скоростей есть "средняя" статистическая струйка ($S-S$), касательная къ направленію потока. Средній потокъ черезъ стѣнки ея - нуль.

Оперируя съ вопросами безпорядочнаго движенія, мы всегда будемъ имѣть дѣло именно съ этой "средней статистической" скоростью въ данной точкѣ (*vitesse moyenne locale*). Въ этомъ лишь смыслъ мы будемъ говорить объ устойчивомъ и закономерномъ распредѣленіи скоростей по сѣченію водотока, о величинѣ наибольшей скорости u_{max} и скорости на стѣнкѣ u_0 , а также о средней скорости сѣченія $U = \frac{Q}{\omega}$. Мы упомянули уже выше о работахъ Boussinesq'а, который показалъ, что съ "средними статистическими" величинами можно оперировать такъ же,

рис. 62.



какъ если бы онѣ были дѣйствительными, т.е., скажемъ рассматривать картину распредѣленія скоростей (61) какъ будто бы она изображаетъ дѣйствительныя, существующія реально скорости.

Замѣтимъ, что все измѣрительные приборы, которыми пользу-

ются для суредьвенія скоростей, опредѣляютъ именно эту среднюю скорость*). Устойчивость и постоянство результатовъ, получаемыхъ при такого рода опредѣленіяхъ несомнѣнно способствовали "прочности" представленія о "струйчатомъ движеніи жидкости" вообще, хотя указанія на безпорядочный характеръ движенія, какъ было выше указано, встрѣчаются въ гидравлической литературѣ уже въ началѣ прошлаго столѣтія. Однако, даже ходовыми сравнительно грубыми измѣрительными приборами отиѣчаются колебанія и отклоненія основныхъ гидравлическихъ элементовъ потока отъ "среднихъ" значеній. Поэтому при опредѣленіи, скажемъ, скорости въ открытомъ водотокѣ (рѣкѣ, каналѣ и пр.) тождественные результаты получатся лишь въ случаѣ, если опредѣленіе покрывало достаточный промежутокъ времени, чтобы учесть именно "среднюю" величину и исключить тѣ или иные отклоненія скорости, называемыя въ этомъ случаѣ "пульсацией". Мы вернемся къ вопросу о пульсаци и объ ея отношеніи къ безпорядочному движенію воды въ главѣ, посвященной движенію въ открытыхъ руслахъ.

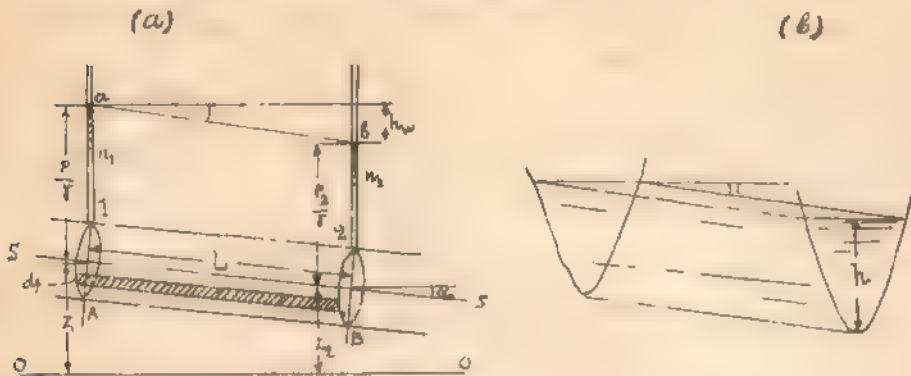
31. *Общее выраженіе для учета силъ сопротивленій въ прямолинейномъ равномѣрномъ установившемся движеніи жидкости.*

Составимъ теперь общее выраженіе для учета силъ сопротивленія въ прямолинейномъ равномѣрномъ установившемся движеніи жидкости, применимое притомъ одинаково какъ къ движенію въ замкнутой цилиндрической трубѣ (фиг. 63 а) любого поперечнаго сѣченія, такъ и къ движенію въ открытомъ руслѣ (фиг. 63 б). Въ послѣднемъ случаѣ будемъ лишь предполагать, что, въ силу того, что мы рассматриваемъ случай равномѣрнаго движенія, не измѣняется форма сѣченія русла и его наполненіе (т.е. глубина h). Указывая на прямолинейность движенія, мы имѣемъ въ виду разсматривать потокъ, въ которомъ струя не имѣетъ кривизны; при

*). Дѣйствительно, обстоятельство, какое рода приборовъ основано на воспріимчивости на это части (лапсы и пр.) потока чашечки.

этомъ, какъ было выше указано, распределение давленій слѣдуетъ гидростатическому закону.

Пусть A и B представляютъ два живыхъ сѣченія трубы
фиг. 83.



(площадью ω) на расстояніи другъ отъ друга L , z_1 и z_2 соответ-
ственные высоты центровъ тяжести сѣченій надъ горизонтальной
плоскостью $O-O$; p_1 и p_2 давленія въ центрахъ тяжести, измѣря-
емая соответствующими столбами жидкости въ пьезометрахъ n_1 и
 n_2 ; α , уголъ наклона оси трубы къ горизонту; очевидно, при
этомъ

$$\sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

Примѣнимъ къ рассматриваемому отсѣку жидкости $A-B$ законъ
движенія центра инерціи.

Такъ какъ движеніе равномерное и установившееся, то уско-
реній не имѣется. Очевидно, дѣйствующія на отсѣкъ $A-B$ силы
уравновѣшиваются силами сопротивленія.

Проекція дѣйствующихъ силъ на ось трубы $S-S$.

силъ тяжести: $\gamma \cdot \omega \cdot L \cdot \sin \alpha = \gamma \omega (z_1 - z_2)$

давленій: $(p_1 - p_2) \omega$

Составимъ еще выраженіе для силъ сопротивленія. Послед-
нія, независимо отъ ихъ природы и количественнаго выраженія,
можно разбить на двѣ группы:

а) силы сопротивленія внутреннія, дѣйствующія внутри от-
сѣка между частями жидкости;

б) силы сопротивленія внѣшнія, т.е. силы, проявляющіяся
между наружными частями и стѣнками сосуда, силы, которыя имѣ-

будем называть "силами трения на стѣнках".

При суммированіи всѣхъ силъ сопротивленія всѣ силы первой группы, очевидно, пропадутъ, такъ какъ всѣ внутреннія силы, проявляющіяся между смежными струйками попарно равны и прямо противоположны по направленію.

Слѣдовательно, въ выраженіе суммы силъ сопротивленій войдутъ лишь силы внѣшняго трения на стѣнкахъ:

Силу сопротивленія на элементарной полоскѣ стѣнки $dF = -L dx$, гдѣ dx выраженіе элемента длины контура живого сѣченія или такъ называемаго смоченнаго периметра, можно выразить черезъ:

$$dR_w = dF \cdot F(u) = -F(u) dx L$$

гдѣ $F(u)$ есть нѣкоторая, зависящая отъ величины мѣстной скорости на стѣнкѣ, величина силы сопротивленія, отнесенной къ единицѣ поверхности стѣнки.

Сумма силъ сопротивленій или "равнодѣйствующая сила" внѣшняго трения на стѣнкѣ:

$$R_w = -L \int_{\chi} F(u) dx = -L \chi F'(u),$$

гдѣ χ есть смоченный периметръ (длина контура живого сѣченія, на которомъ жидкости соприкасается со стѣнкой), а $F'(u)$ нѣкоторая средняя величина внѣшняго тѣненія на единицѣ поверхности стѣнки, зависящая отъ средней скорости на стѣнкѣ u , рода стѣнки, конфигураціи потока и пр.

Составляя теперь уравненіе равновѣсія, имѣемъ:

$$\gamma \omega(z_1 - z_2) + \omega(p_1 - p_2) - L \chi F'(u) = 0$$

или

$$(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = L \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{F'(u)}{\gamma} \quad (a)$$

Величина, стоящая въ лѣвой части выраженія (a), есть ничто иное (фиг. 63). какъ разность пьезометрическихъ высотъ въ сѣченіяхъ А и В т.е. потеря напора h_w . $\frac{h_w}{L} = i$ есть пьезометрическій уклонъ, для случая открытаго русла представляющій ничто иное, какъ уклонъ свободной поверхности потока. Уравненіе (a) поэтому принимаетъ видъ

$$i = \frac{h_w}{L} = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{F'(u)}{\gamma} \quad (b)$$

Величину $\frac{\omega}{\chi}$, т.е. отношение площади живого сечения къ смоченному периметру, называть со времени Dubuat (Principes d'hydraulique) "гидравлическимъ радиусомъ" и обозначать обычно черезъ $R = \frac{\omega}{\chi}$.

Что касается величины $\frac{F(U)}{\gamma}$, то, принимая во вниманіе, что въ равномерномъ движеніи при данной конфигураціи потока и характерѣ стѣнокъ распределеіе скоростей по сеченію является вполне опредѣленнымъ, — какъ отдѣльныя скорости на стѣнкахъ, такъ и величина средней скорости на стѣнкахъ могутъ быть выражены черезъ величину средней скорости сечения U , а потому, очевидно, возможно написать:

$$\frac{F'(U)}{\gamma} = \frac{F(U)}{\gamma}$$

т.е. выразить черезъ среднюю скорость сечения U также и величину равнодѣйствующей силѣ тренія на стѣнкахъ. Вѣсто (b) имѣемъ

$$i = \frac{1}{R} \cdot \frac{F(U)}{\gamma}$$

или

$$Ri = \frac{F(U)}{\gamma} \quad (c)$$

Величина $\frac{F(U)}{\gamma}$ опредѣляется эмпирически изъ опытовъ надъ равномернымъ движеніемъ въ прямолинейныхъ водотокахъ.

Въ слѣдующемъ параграфѣ мы приведемъ получающіяся при этомъ и употребляемая въ практикѣ соотношенія. Теперь еще приведемъ нѣкоторыя сопоставленія для болѣе полнаго уясненія рассматриваемыхъ явленій. Величина $\frac{F(U)}{\gamma} = \frac{F'(U)}{\gamma}$ представляетъ собой, согласно вышеизложенному, величину, отнесенной къ единицѣ вѣса жидкости силы сопротивленія на единицѣ площади стѣнки, выраженной въ зависимости отъ средней скорости сечения. Выше (§ 23) было выведено, что величина пьезометрическаго уклона въ случаѣ равномернаго установившагося движенія представляетъ собой величину работъ всѣхъ силъ сопротивленія, отнесенныхъ къ единицѣ вѣса жидкости на единицѣ длины потока.

Сопоставляя (c) имѣемъ, что работа силъ сопротивленія на единицѣ длины, отнесенная къ единицѣ вѣса жидкости также равна

$$i = \frac{F(U)}{R \gamma}$$

Умножая γ на L и на γQ — вѣсь протекающей въ единицу времени черезъ сѣченіе жидкости, получаемъ

$$N_n = h_n Q \gamma - L i \gamma Q$$

полную работу всѣхъ силъ сопротивленій въ единицу времени (мощность) на участкѣ длиной L ; очевидно

$$R_n = N_n \Delta t = L i \gamma Q \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

представляетъ такую же работу, но лишь за промежутокъ времени Δt .

Величину R_n (d) можно переписать слѣдующимъ образомъ:

$$N_n - L \gamma Q \frac{F(U)}{R \gamma} = L \omega U \frac{F(U)}{\omega} - L \chi F(U) U$$

или

$$N_n = \mathcal{F} F'(U) U$$

■

$$R_n = N_n \Delta t = \mathcal{F} F'(U) U \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

гдѣ $\mathcal{F} = L \chi$.

Такимъ образомъ, полная работа сопротивленій на отсѣкѣ длины L за нѣкоторый промежутокъ времени Δt получится, если умножить равнодѣйствующую силъ вѣшняго тренія на боковой поверхности отсѣка $\mathcal{F} F'(U)$ на перемѣщеніе $\Delta s = U \Delta t$, соответствующее средней скорости U

Полная работа силъ сопротивленія R_n составляется изъ работы вѣшнихъ треній на стѣнѣ R_c и изъ работы силъ внутренняго тренія R_i частицъ между собой:

$$R_n = R_c + R_i .$$

На самомъ дѣлѣ, хотя сумма всѣхъ внутреннихъ силъ тренія и равна нулю, но работа ихъ нулю не равна по той причинѣ, что скорости смежныхъ струй различны; благодаря этому попарно равныя и противоположныя силы тренія между двухъ смежныхъ струй при составленіи выраженія работъ умножаются на различныя перемѣщенія.

Въ некоторыхъ частныхъ случаяхъ оказывается возможнымъ очень просто произвести раздѣленіе потерь, т. е. опредѣлить какую часть изъ полной работы сопротивленій R_n составляетъ работа тренія на стѣнкѣ R_c и какую - работа внутреннихъ треній R_i . Рассмотримъ напримѣръ, случай, когда скорость на стѣнкѣ всюду одинакова (U_0) (труба круглаго сѣченія и т.д.). Въ этомъ случаѣ работа силъ сопротивленія на стѣнкѣ на участкѣ длины L за промежутокъ времени Δt получится, умножая равнодѣйствующую силу вѣншихъ треній $\oint F(u)$ на одинаковое для всѣхъ элементовъ поверхности перемѣщеніе $U_0 \Delta t$.

Такимъ образомъ,

$$R_c = \oint F(u) U_0 \Delta t$$

Сопоставляя съ (е) имѣемъ:

$$\frac{R_c}{R_n} = \frac{\oint F(u) U_0 \Delta t}{\oint F(u) U \Delta t} = \frac{U_0}{U}$$

т.е. отношеніе работъ вѣншихъ силъ тренія на стѣнкѣ къ полной работѣ силъ сопротивленій равно отношенію скорости на стѣнкѣ къ средней скорости сѣченія.

Очевидно:

$$\frac{R_i}{R_n} = 1 - \frac{U_0}{U}$$

Опытъ показываетъ, что съ увеличеніемъ шероховатости отношеніе $\frac{U_0}{U}$ уменьшается; такимъ образомъ оказывается, что чѣмъ шероховатѣе стѣнка, тѣмъ большая часть энергіи тратится внутри жидкости и тѣмъ меньшая - на стѣнкѣ. Это обстоятельство, казалось бы съ перваго взгляда парадоксальное, дѣлается, однако, вполне понятнымъ, если принять во вниманіе, что разсѣяніе энергіи внутри потока обуславливается "степенью" безпорядочности движенія, которая въ свою очередь опредѣляется именно шероховатостью стѣнки*).

*) Подробнѣе см. Б.А. Вахмистевъ. "О неравн. движ. жидко-сти". Спр. 23 - 25.

32. Видъ $\frac{F(U)}{\gamma}$, выражающій величину сопротивленій въ безпорядочномъ движеніи.

Выше уже было указано, что величина сопротивленій въ безпорядочномъ движеніи пропорціональна примерно квадрату скорости. Въ первой половинѣ прошлаго столѣтія господствовалъ при томъ взглядъ, что величина сопротивленій не зависитъ отъ рода стѣнки. Взглядъ этотъ въ наиболѣе полной и стѣпательной формѣ онъ высказанъ въ 1804 г. знаменитымъ инженеромъ и директоромъ *École des Ponts et Chaussées* Prony въ его классическомъ сочиненіи "*Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*", составившимъ въ свое время эпоху въ исторіи гидравлики и, какъ оно выше указано, опредѣлявшимъ на дѣлое полстолѣтіе образъ мыслей въ этомъ вопросѣ.

Согласно Prony

$$R_i = \frac{F(U)}{\gamma} = a \cdot l + b U^2 \quad \dots \quad (a)$$

гдѣ a и b нѣкоторыя постоянныя, независимыя отъ рода стѣнокъ коэффициенты. Для трубъ Prony вывелъ путемъ крайне тщательнаго анализа данныхъ ряда опытовъ различныхъ изслѣдователей $a = 0,000017$; $b = 0,000348$. Уже изъ значеній коэффициентовъ видно, что при сколько нибудь значительныхъ скоростяхъ превалируетъ второй членъ выраженія (а), т.е. сопротивление дѣлается приблизительно пропорціональнымъ квадрату скорости.

Формулу можно переписать еще въ видѣ:

$$R_i = U^2 \left(b + \frac{a}{U} \right) = b' U^2, \quad \text{гдѣ} \quad b' = b + \frac{a}{U} \quad \dots \quad (b)$$

Недоразумѣнія, происшедшія на практикѣ при примѣненіи формулы Prony (и другихъ подобно ему не учитывавшихъ вліянія шероховатости стѣнки и стремившихся исправить формулу Prony замѣной его коэффициентовъ другими также постоянными и "годными" для всѣхъ случаевъ условій), заставили пересмотрѣть этотъ вопросъ дѣлкомъ.

Въ 1849 году главный инженеръ Парижскаго водопровода H. Darcy предпринялъ знаменитые свои опыты надъ движеніемъ воды въ водопроводныхъ трубахъ. (Опыты окончены въ 1851 г.; описание ихъ: *Recherches expérimentales sur le mouvement de*

l'eau dans les tuyaux de conduites P. 1857). Въ 1855 году начались опыты того же инженера надъ движеніемъ воды въ открытых каналахъ. Опыты эти были окончены уже послѣ смерти Darcy его бывшимъ помощникомъ Bazin'омъ (Recherches hydrauliques par H. Darcy et Bazin. P. 1865)*). Результаты этихъ классическихъ опытовъ совершенно перевернули державшееся до того времени взгляды Prony.

Основной, наиболее важный результатъ опытовъ Darcy и Bazin'а состоялъ въ томъ, что было непосредственно доказано то огромное вліяніе, которое оказываетъ на сопротивленія состояніе стѣнки. Такъ изъ опытовъ Darcy надъ трубами выяснилось, что для чугунной водопроводной трубы одного и того же діаметра и одинаковой длины, сопротивленіе при одинаковомъ расходѣ можетъ увеличиться почти въ два раза, если вмѣсто новой трубы взять старую, бывшую уже много лѣтъ въ эксплуатаціи, благодаря чему стѣнки трубы покрыты осадкомъ, сильно увеличивающимъ шероховатость.

Еще болѣе разительнымъ примѣромъ служить опытъ Darcy и Bazin'а, относящійся къ 1856 г., въ которомъ въ одномъ и томъ же экспериментальномъ каналѣ стѣнки послѣдовательно устраивались изъ различныхъ матеріаловъ. При одномъ и томъ же уклонѣ и расходѣ получались при этомъ совершенно различныя скорости. Въ формулѣ

$$Ri = bU^2$$

получились слѣдующія значенія b , сообразныя въ таблицѣ (см. стр. 96), въ которой для сравненія приведенъ и соответствующій тѣмъ же условіямъ коэффициентъ b' по Prony (b).

Что касается вида общей формулы, выражающей сопротивленія, то изъ своихъ опытовъ Darcy и Bazin заключили, что отклоненія отъ пропорціональности квадрату скорости незначительны, и потому нѣтъ нужды въ формулѣ подобной (а) оставлять

*). Оба эти классическія сочиненія по гидравликѣ удостоились одобренія Французской Академіи и были напечатаны въ ея журналахъ (Savants étrangers). Изученіе этихъ сочиненій (особенно второго) и въ настоящее время составляетъ лучший удобный способъ по ясности и глубинѣ мысли, ширинѣ затронутого матеріала и образцовой постановкѣ гидравлическихъ экспериментовъ.

Т а б л и ц а.

(Каналъ шириною 3 м.; $i = 0,005$; $Q = 1,286$).

(Rech. Hydr.).

Р о д ъ с т ѣ н к и	b изъ опыта	b' по Prony	$b \times 2 g = f$
Цементная штукатурка	0,000172	0,000327	0,00337
Доски	0,000229	0,000329	0,00450
Кирпичи	0,000277	0,000330	0,00545
Мелкій гравій (1-2 см.)	0,000472	0,000335	0,00925
Крупный гравій (3-4 см.)	0,000661	0,000338	0,0130

членъ, пропорціомальны берной степени скорости. Наоборотъ, они замѣтили, что при одной и той же скорости и одинаковомъ матеріалѣ стѣнки, сопротивление нѣсколько уменьшается вмѣстѣ съ увеличеніемъ гидравлическаго радіуса сѣченія. Поэтому въ результатѣ опытовъ были предложены формулы вида:

$$\frac{R \cdot i}{U^2} = b + \alpha \left(1 + \frac{3}{R}\right) \dots \dots \dots (35)$$

Для чугунныхъ новыхъ трубъ (опыты Darcy обнимали діаметры отъ 0,012 м. до 0,5 м.; скорости при этомъ измѣнялись отъ 0,16 м. до 5 м/с) принимая во вниманіе, что для круглаго сѣченія гидравлическій радіусъ $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4 \cdot 2} = \frac{D}{4}$, Darcy далъ для метроваго размѣра)

$$\frac{Di}{4} = U^2 \left(0,0000507 + \frac{0,000001294}{2} \right)$$

Для стѣнкахъ каналовъ формула сохранила видъ (35) причѣмъ коэффициенты χ и β были даны для 5 категорій (родовъ)

стѣнокъ различной степени шероховатости.

При рѣшеніи вопросовъ, касающихся движенія воды въ открытых руслахъ, соотношенія изображаютъ обычно въ иной формѣ, а именно, полагая $\frac{1}{b} = C^2$, пишутъ:

$$U = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{R_1} = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{a(1 + \frac{b}{R})}} = C \sqrt{R_1} \quad (35^{bis})$$

Въ 1897 году Bazin нѣсколько упростилъ формулу (35) предложивъ выразить величину C слѣдующимъ образомъ:

$$C = \frac{a}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

гдѣ a — постоянная для данной размѣрности величина, а переменной вмѣстѣ съ шероховатостью стѣнки является одна лишь величина γ .

Для метроваго размѣра Bazin придалъ своей "новой" формулѣ видъ:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

причемъ нашелъ удобнымъ дать величину γ для шести слѣдующихъ категорій стѣнокъ:

- | | |
|--|------|
| 1. Очень гладкія стѣнки (цементная штукатурка, строганныя доски). | 0,06 |
| 2. Гладкія стѣнки (доски, кирпичи, тесовая кладка). | 0,16 |
| 3. Бутовая (чистая) кладка. | 0,46 |
| 3 ^{bis} . Промежуточная категорія (грубая бутовая кладка, очень правильныя стѣнки въ плотномъ земляномъ грунтѣ, замоценныя стѣнки). | 0,85 |
| 4. Земляныя стѣнки въ обычномъ состояніи | 1,30 |
| 5. Земляныя стѣнки, представляющія исключительное сопротивленіе | 1,75 |

Мы привели здѣсь цѣликомъ таблицу коэффициентовъ шероховатости

сти "новой" формулы Bazin'a лишь затѣмъ, чтобы уяснить, что сами по себѣ такого рода "категоріи", "степени шероховатости" и пр. являются, очевидно, лишь групповой характеристикой известной группы явленій. Само собой ясно, что на самомъ дѣлѣ могутъ имѣть мѣсто и всѣ промежуточные между приведенными величинами значенія γ . При построеніи практическихъ формулъ дѣло, очевидно, идетъ лишь о томъ, чтобы объединить болѣе или менѣе однородныя явленія и характеризовать полученную группу чѣмъ-то однимъ среднимъ групповымъ коэффициентомъ.

Совершенно ясно, что точность вычисленій, основанныхъ на подобныхъ формулахъ, сравнительно невелика; лишь если имѣются данныя опыта для условій, совершенно подобныхъ тѣмъ, которыя имѣются въ виду воспроизвести, можно съ увѣренностью ожидать полного совпаденія результатовъ расчета съ действительностью. Въ противномъ случаѣ надо всегда быть готовымъ къ некоторымъ несоответствіямъ въ этой области.

Вообще говоря, всѣ гидравлическія явленія можно раздѣлить на два большихъ класса: 1) явленія, въ которыхъ преобладаетъ треніе, вызванное шероховатостью стѣнокъ, — и обратно 2) явленія, въ которыхъ треніе о стѣнки не играетъ существенной роли.

Примеромъ перваго рода является движеніе въ трубахъ и каналахъ; примеромъ второй группы явленій — истеченіе черезъ отверстіе, водосливъ и пр.

Во второй группѣ явленій всѣ соотношенія количественно устойчивы; поэтому расчеты могутъ быть производимы съ очень большою точностью; явленія при этомъ могутъ легко быть полностью воспроизводимы и повторены. Оба эти обстоятельства служатъ причиною, почему такого рода явленіями пользуются въ качествѣ "измѣрительнаго". Обратно, — въ первой группѣ, благодаря разнообразію возможныхъ состояній стѣнокъ (въ зависимости отъ матеріаловъ и ихъ обработки) всѣ соотношенія измѣнчивы и непостоянны; двѣ трубы, казалось бы, одинаковаго издѣлія всегда обнаруживаютъ нѣкоторое несогласіе въ величинѣ сопротивленій. Ясно, что пользование явленіями второго рода въ качествѣ измѣрительнаго совершенно недопустимо. Очевидно, что въ подобныхъ родахъ случаевъ нѣтъ никакого смысла считать съ большою точностью, стараясь получать результаты съ большимъ числомъ знаковъ.

Изложенное выше определение коэффициента шероховатости стѣнки, какъ средней групповой характеристики, вслѣдъ объясняетъ тотъ просторъ, который можетъ быть въ установленіи основныхъ группъ явленій. Это и служитъ причиной появленія того огромнаго числа всякаго рода формулъ, которыя предложены для выраженія основного соотношенія (35). Мы приведемъ нѣкоторыя главнѣйшія формулы въ дальнѣйшемъ, въ специальныхъ главахъ, посвященныхъ движенію воды въ трубахъ и каналахъ. Теперь же вернемся еще къ общему обсужденію основного соотношенія (35):

Выраженіе

$$i = \frac{bU^2}{R} = \frac{U^2}{C^2} \cdot \frac{1}{R}$$

можно преобразовать въ

$$i = \frac{f}{R} \cdot \frac{U^2}{2g},$$

гдѣ, очевидно,

$$f = b \cdot 2g = \frac{2g}{C^2}.$$

Формула Дарси для новыхъ чугунныхъ водопроводныхъ трубъ при этомъ пріобрѣтаетъ видъ:

$$i = \frac{4b}{2} U^2 = \sim 0.005 \left(1 + \frac{1}{400}\right) \frac{4}{\gamma} \frac{U^2}{2g},$$

такимъ образомъ $f = \sim 0.005 \left(1 + \frac{1}{400}\right)$

Въ практическихъ приложеніяхъ ее обычно принимаютъ въ формѣ

$$i = \frac{h_w}{L} = \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (36)$$

гдѣ

$$\lambda = 4f = 0.02 \left(1 + \frac{1}{400}\right)$$

Преимущество выраженія сопротивленій черезъ коэффициентъ $f = 2gb$ заключается въ томъ, что величина f не имѣетъ измѣренія, является просто численнымъ коэффициентомъ, одинаковымъ для всѣхъ мѣръ, тогда какъ C имѣетъ измѣреніе $\frac{1}{\sqrt{L}}$ (т.е. корня изъ ускоренія), а b обратную ускоренію величину и слѣдо-

вательно, численныя значенія ихъ измѣняются въ зависимости отъ того, въ какихъ мѣрахъ производить расчетъ.

Такъ какъ ζ есть работа силъ сопротивленія на единицу длины, отнесенная въ единицу всѣхъ жидкости, а $\frac{U^2}{2g}$ кинетическая энергiя, заключающаяся въ единицу всѣхъ жидкости, то величина $\frac{\zeta}{R}$ измѣряетъ работу силъ сопротивленій на единицу длины, отнесенную къ кинетической энергiи, заключенной въ данномъ объемѣ жидкости:

Величина
$$\zeta \frac{U^2}{2g} = \zeta U^2 = R_1 = \frac{F(U)}{\gamma}$$

представляетъ изъ себя также отнесенную къ единицу всѣхъ силу тренiя, приходящуюся въ безпорядочномъ движенiи на единицу поверхности стѣнки:

Величину ζ будемъ вѣстѣ съ Unwin'омъ (Treatise on hydraulics. 1897, стр. 133) называть коэффициентомъ тренiя жидкости о стѣнку.

Unwin приводитъ слѣдующiя величины коэффициентовъ тренiя, полученныхъ при движенiи въ безграничной водѣ широкихъ плоскихъ фигуръ.

Т а б л и ц а

Родъ поверхности:	ζ
Свѣже-окрашенное желѣзо.	0,0049
Крашенная строганная доска	0,0035
Поверхность жел. корабля (Rankine)	0,0036
Поверхность, покрытая лакомъ (Froude)	0,0026
Поверхность покрытая пескомъ различной крупности.	0,004- 0,008

Какъ видимъ, коэффициентъ тренiя Darcy $\zeta = \infty$ 0,005 близокъ къ коэффициенту перваго ряда таблицы.

Величина коэффициента тренiя ζ приведенная въ послѣдней графѣ таблицы (опытъ Darcy Bazin'a) во всякомъ случаѣ одного порядка съ ко-

эффициентомъ табл. на стр. 96.

Къ подобнымъ же величинамъ привели Unwin'a опыты надъ тренiемъ при вращенiи дисковъ. (См. Enc. Brit. 11 изд. т. XIV, стр. 57).

33. Показательныя формулы.

Въ формулахъ Darcy-Weisbach'a сопротивленія принимаются пропорціональными квадрату скорости. На самомъ дѣлѣ, какъ мы указали еще въ началѣ главы, сопротивленія въ беспорядочномъ движеніи пропорціональны не квадрату, а степени лишь близкой ко второй. Это обстоятельство и приводитъ къ типу формулъ, подобныхъ выраженію Prony

$$\frac{Ri}{U^2} = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{U}\right)$$

измѣненіемъ коэффициента β , исправляющаго неправильность основного построения формулы.

Всего лучше всѣ эти явленія учитываются примѣненіемъ такъ называемыхъ показательныхъ формулъ, т.е. соотношеній вида:

$$L = \frac{h_w}{L} = \frac{k \cdot U^n}{R^m}$$

гдѣ k некоторый коэффициентъ, зависящій лишь отъ шероховатости стѣнокъ, а постоянныя n и m показатели степени, указывающія зависимость сопротивленій отъ той или иной степени скорости и гидравлическаго радіуса. Нанося на графикъ результаты опытовъ въ логарифмической шкалѣ (т.е. примѣняя логарифмическія анаморфозы), непосредственно изъ чертежа находятъ величины k , n и m . Показательныя формулы были предложены еще въ 60-хъ годахъ прошлаго столѣтія Saint-Venant'омъ и Hagen'омъ.

Въ настоящее время формулы эти въ большомъ употребленіи, преимущественно у англійскихъ и американскихъ гидравликовъ; практическое пользованіе ими дѣлается особенно удобнымъ въ графической интерпретаціи въ видѣ номограммъ (см. II часть).

Ussiw (см. Hydraulics, стр. 217) далъ для метрическаго и футоваго размѣра на основаніи подробнаго анализа очень большого числа опытовъ слѣдующія значенія показателей n , m и коэф-
фициента k .

Р о д ъ т р у б ѣ	К		m	n
	сант.	футы		
Жестъ	0,0169	0,0265	1,10	1,72
Желѣзо	0,0131	0,0226	1,21	1,75
Желѣзо, грунтое асфальтомъ	0,0163	0,0254	1,13	1,85
Клепанная желѣзн. труба	0,0140	0,0230	1,39	1,87

Р о д ъ т р у б њ	К		m	n
	метри	англий		
Чугунная труба (новая) —	0.0186	0.0215	1.17	1.95
Чугунная труба (оцинкованная)	0.0199	0.0243	1.17	2.0
Чугунная тр. (загрязненная)	0.0384	0.0440	1.16	2.0

Изъ таблицъ ясно причина, побуждавшая Darcy принять для выражения сопротивлений чугунныхъ трубъ простую формулу (36).

Крайне интересному попытку построить для трубъ универсальную формулу, охватывающую все формы движений далъ Reynolds.

Въ самой общей формѣ можно написать

$$\Delta p = k \cdot D^x \cdot \eta^y \cdot \rho^z \cdot U^n \cdot l \quad (1)$$

соотношение, лишь выражающее общую зависимость паденія давления вдоль трубъ отъ всѣхъ возможныхъ факторовъ*).

Подставляя теперь величины размѣрности входящихъ въ выражение (1) величинъ, получимъ

$$\frac{M}{L^2 T} = k \cdot L^x \left(\frac{M}{LT}\right)^y \left(\frac{M}{L^3}\right)^z \left(\frac{L}{T}\right)^n \cdot L = k \cdot L^{x+y-3z+n+1} M^{y+z} T^{-y-n}$$

Такъ какъ показатели при величинахъ L , M и T должны быть въ обѣихъ частяхъ уравненія одинаковы, то получаемъ систему уравненій

$$\left. \begin{aligned} x+y-3z+n+1 &= -1, \\ y+z &= 1, \\ -(y+n) &= -2, \end{aligned} \right\} \text{рѣшая имѣемъ} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= n-3, \\ y &= 2-n, \\ z &= n-1; \end{aligned} \right.$$

откуда

$$\frac{\Delta p}{l} = k' \cdot D^{n-3} \eta^{2-n} \rho^{n-1} U^n$$

или замѣнивъ ρ черезъ $\frac{\eta}{\nu}$

$$\frac{\Delta p}{l} = k' \cdot \left(\frac{k'}{\eta^{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{2-n} \left(\frac{U^n}{d^{n-3}}\right) = \text{const} \cdot \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{2-n} \frac{U^n}{d^{n-3}} \quad (II)$$

Согласно этой формулѣ вліяніе вязкости, діаметра и пр. зависитъ отъ значенія показателя n .

* Въ выраженіи зломъ η — коэффициентъ внутренняго тренія; $\rho = \frac{M}{L^3}$ — масса единицы объема.

Если $n = 2$; $2 - n = 0$

$$i = \text{const} \frac{U^2}{d},$$

имеет формулу Darcy (36)

Если $n = 1$ (струйчатое движение $u < u_{cr}$) получаем

$$i = \text{const} \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{U}{d^3}$$

т.е. формулу Poiseuille-Bagenpach'a для капиллярных трубок.

Величина $\frac{\eta}{\gamma}$ зависит от температуры; по буквальному смыслу уравнения (II) сопротивление лишь в том случае вовсе не зависит от температуры если $n = 2$; если $n < 2$, то сопротивление и в безпорядочном движении должно несколько зависеть от вязкости и уменьшаться с возрастанием температуры.

С этими согласуются результаты опытов M. Maig'a над сопротивлением в чистой $1\frac{1}{2}$ дюймовой латунной трубе при различных температурах.

В этих опытах λ оказалось равным 1.795.

Вот средние значения коэффициента трения λ при различных температурах для скоростей от 4 до 9 фут.

t Cels	14°	43°	71°	*)
λ	от 0.0044 до 0.0052	от 0.0037 до 0.0041	от 0.0035 до 0.0038	

34 Выражение внутреннего трения в безпорядочном движении по Boussinesq'у.

Приведенные в предыдущих §§ соотношения дают общую картину работы сопротивлений во всем обихе и тем самым служат основанием для решения целого ряда вопросов практической гидравлики, поскольку приходится искать соотношения между полными расх. или средн. скоростями, уклоном и пр. Однако все вышеизложенное не дает еще детальной картины движения, не может, например, установить даже скольконибудь

*) Enc. Brit. XI vol. ch. Hydraulics.

предположительно картину изменения скоростей по сечению.

Для решения подобного рода вопросов необходимо, очевидно, обратиться къ рассматриваемым силам внутреннего трения, проявляющимся между частицами внутри потока. Для струючатого движения выражение внутреннего трения, построенное на законах Ньютона, приведено въ (§ 29)

$$T = F \cdot \eta \frac{du}{dy}$$

Для беспорядочного движения водоростъ все болѣе затрудняется тѣмъ, что реальныхъ слоевъ не имѣется, и, говоря о какихъ бы то ни было силахъ въ какой либо точкѣ, надо понимать эти силы опять таки въ среднемъ "статистическомъ" смыслѣ.

Такимъ образомъ постоянная сила T , действующая въ точкѣ А внутри жидкости во нѣкоторому направленію α получается, приравливая импульсъ, получающійся отъ дѣйствія этой силы въ теченіе нѣкотораго времени τ , достаточнаго для получения средняго устойчиваго результата, суммѣ импульсовъ на то же направленіе за то же время въ суммѣ мгновенныхъ силъ T' , действующихъ каждая въ теченіе малаго промежутка времени δt , следовательно,

$$T \cdot \tau = \int_0^{\tau} T' \delta t \quad . \quad T = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T' \delta t$$

Эти среднія силы (actions moyennes - (среднія "дѣйствія") Boussinesq'a) въ концѣ концовъ очевидно, зависятъ отъ среднихъ мгновенныхъ скоростей и ускореній. Такъ на примѣръ, въ медленно измѣняющемся движеніи, оттого, что "среднія" ускоренія въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій равны нулю, равны нулю въ нихъ также и "среднія дѣйствія" силъ инерціи, благодаря чему и въ беспорядочномъ движеніи въ случаѣ медленно измѣняющагося движения давленіе въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій распространяется по гидростатическому закону.

Среднія дѣйствія силъ внутреннего трения направлены исключительно къ среднимъ мгновеннымъ скоростямъ, т.е. исключительно къ "струямъ" такъ, какъ если бы послѣднія дѣйствительно существовали.

При этомъ Boussinesq предложилъ выразить силы сопротивленія между струйками посредствомъ формулы

$$T = F \cdot \epsilon \cdot \frac{du}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

случае для выражения сил трения в струйчатом движении, с той лишь разницей, что вместо постоянного для данной жидкости и температуры коэффициента вязкости η , входящего в уравнение (А) в случае струйчатого движения, в выражение (В) силы трения между струями в беспорядочном движении входит особый переменный по сечению коэффициент $\eta_{\text{вн}}$ обусловленный движением беспорядочного движения, зависящий, как выражается Boussinesq, от степени беспорядочности движения (*intensité d'agitation tourbillonnaire*) в данной точке.

Выше уже было указано, что беспорядочность движения увеличивается с возрастанием

- 1) шероховатости стѣнки,
- 2) скорости у стѣнки.

Кроме этих прямых непосредственных факторов, обуславливающих интенсивность "зарождения" беспорядочных движений, увеличению степени беспорядочности, вообще говоря, способствуют:

- 3) Плотность жидкости,
- 4) Полного сечения (*ampleur de la section Boussinesq*), т.е. мера приходящегося на определенную величину поверхности стѣнки объема потока, в котором зарождаются на стѣнке беспорядочные движения могли бы свободно развешиваться.

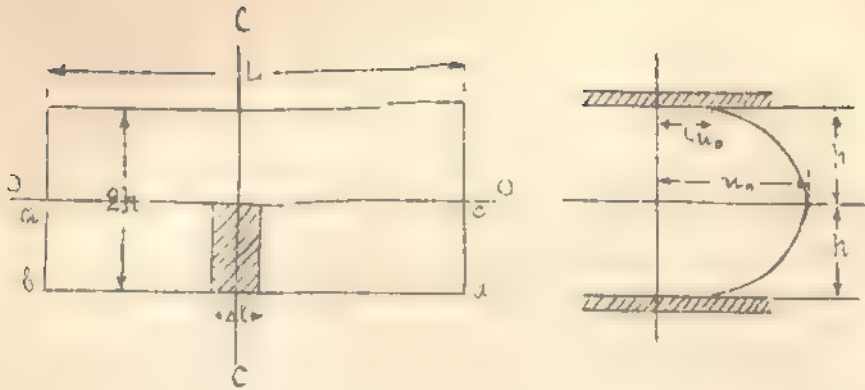
Величина эта непосредственно характеризуется гидравлическим радиусом, как величиной измеренной отношением площади сечения к смоченному периметру, или в определенном отѣвѣ потока между двумя его живыми сечениями отношение объема отѣвка к поверхности стѣнки.

На основании вышеизложенных соображений Boussinesq дал следующие выражения коэффициента трения в частных случаях: 1) прямоугольного потока бесконечной ширины; 2) круглой цилиндрической трубы.

- 1) Прямоугольный поток.

Предположим, что ширина прямоугольного потока L весьма велика по сравнению с его высотой $2h$; в силу этого в сечениях потока С-С достаточно удаленных от боковых стѣнок движения одинаковы. Очевидно, кроме того, что движение симметрично относительно оси О-О; случай этот одинаково

Фиг. 64.



относится либо къ движению въ прямоугольной трубѣ, либо въ открытомъ каналѣ, представляющемъ, очевидно, лишь нижнюю половину $abcd$ такой трубы. Въ рассматриваемомъ случаѣ область потока, подчиненная безпорядочнымъ движениямъ, возникающимъ на некоторой части стѣнки Δl представляетъ собой прямоугольникъ $\Delta l h$ (заштрихованъ); гидравлическій радиусъ, очевидно, равенъ h .

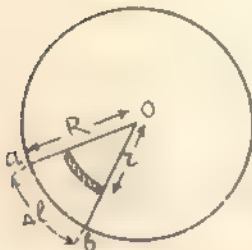
Согласно предположенію Boussinesq'a безпорядочность движения одинакова во всемъ заштрихованномъ объемѣ и согласно вышеизложенному ε принимаетъ видъ

$$\varepsilon = A \cdot \gamma \cdot h \cdot u_0$$

гдѣ A коэффициентъ, зависящій отъ шероховатости стѣнки.

2) Для круглой трубы область подчиненная возникающимъ на элементѣ стѣнки Δl безпорядочнымъ движениямъ представляется въ видѣ фигуры $ao\bar{b}$.

Фиг. 65.



По мѣрѣ приближенія къ центру зародившіяся на поверхности стѣнки движения принуждены развѣтвляться во все болѣе и болѣе тѣсномъ пространствѣ; происходитъ какъ бы концентрація безпорядочныхъ движений; степень безпорядочности, слѣдовательно, по мѣрѣ приближенія къ центру возрастаетъ; возрастаніе безпорядочности происходитъ въ зависимости

отъ величины $\frac{R}{z}$; такимъ образомъ

$$\varepsilon = A \gamma u_0 \cdot \frac{R}{z} \psi\left(\frac{R}{z}\right),$$

гдѣ $\frac{R}{z}$ гидравлическій радіусъ круглаго сѣченія, а $\psi\left(\frac{R}{z}\right)$ нѣкоторая опредѣленная функція отъ $\frac{R}{z}$.

Въ своихъ первыхъ работахъ (Théorie des saux courantes. 1877) Boussinesq отдѣлялъ относительно функціи ψ наиболее простое предположеніе, а именно положилъ

$$\psi\left(\frac{R}{z}\right) = \frac{R}{z}$$

Полученная при этомъ картина распредѣленія скоростей въ общемъ хорошо совпадала съ результатами опытовъ Darcy надъ распредѣленіемъ скоростей въ трубахъ. Въслѣдствіи Boussinesq, на основаніи болѣе детальнаго экспериментальнаго изученія распредѣленія скоростей въ трубѣ Bazin'омъ, усложнили видъ

$$\psi\left(\frac{R}{z}\right) .$$

Мы вернемся къ этимъ вопросамъ и сопоставимъ выводы Boussinesq'a съ результатами опытовъ во второй части курса. Злѣсь же ограничимся лишь общимъ указаніемъ на достаточно удовлетворительную сходимость опыта и теоріи.

Замѣтимъ еще, что сопротивленія опредѣляются по формулѣ (B) лишь внутри потока, гдѣ измѣненіе скорости непрерывно и

$\frac{du}{dn}$ тѣмъ болѣе конечно. На внѣшнихъ границахъ потока у стѣнки, какъ было выше указано, измѣненіе скорости претерпѣваетъ разрывъ; злѣсь, согласно Boussinesq'у, величина сопротивленія на единицу поверхности просто равна

$$\gamma \cdot B \cdot u^2.$$

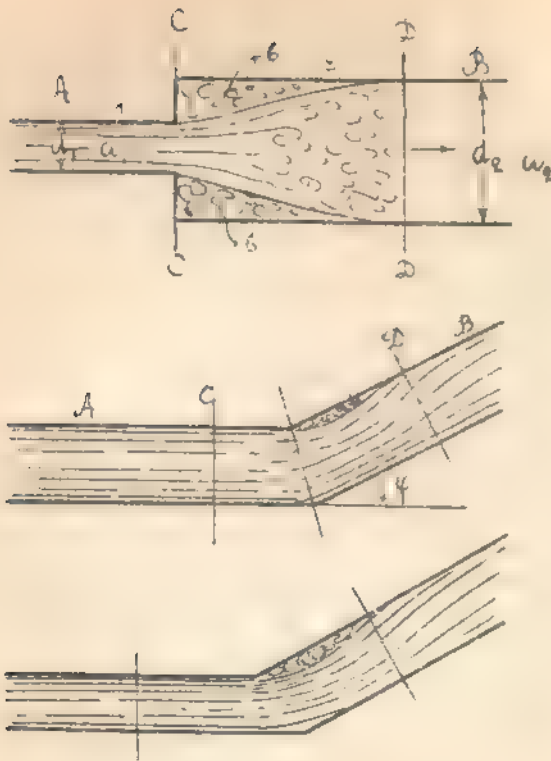
Величина эта въ нашемъ последующемъ изложеніи обозначалась

$$F(u).$$

35. Потери на "ударъ".

Разсмотримъ теперь обстоятельства сопровождающія быструю измѣненія конфигураціи потока, явленія, которыя принято называть явленіями "удара".

Фиг. 66.



Фиг. (66a) соответствует "удару" при внезапном увеличении сечения. В сечении C труба A (площадь сечения ω_1) соединяется с трубой B (площадь сечения ω_2).

Обе трубы предполагаются достаточно длинными для того, чтобы влив от сечения C-C и вправо от сечения D-D установилось равномерное движение. В этих частях поэтому имеют место "нормальные" потери от трения струй между со-

бой и о стенки, рассмотренные в предыдущих отблках. Между сечениями C и D имеется сравнительно короткий переходный участок (C-D), на котором и происходит быстрое изменение режима, происходит почти внезапное изменение величины скорости от $U_1 = \frac{Q}{\omega_1}$ в сечении C-C на $U_2 = \frac{Q}{\omega_2}$ в сечении D-D.

Фиг. (66 b) соответствует удару при внезапном изменении направления потока. Трубы A и B одинакового сечения и формы в сечении O-O соединены под углом φ . Влив таким образом на переходном участке C-D имеет место быстрое изменение направления скорости, хотя величина ее остается постоянной. Случай (в) соответствует одновременному резкому изменению, как величины так и направления скорости.

Все эти явления быстрого изменения конфигурации потока сопровождаются значительными потерями энергии; потери эти, сосредотачиваясь в переходных участках, называются обычно потерями "на удары".

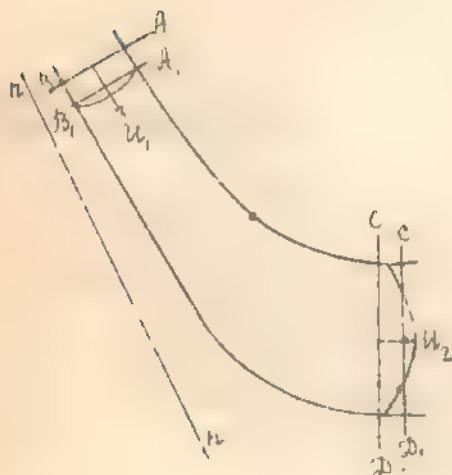
По сравнению с возмущениями сопротивления от трения в

установившемся равномерномъ движеніи, вообще говоря, крайне незначительны. Обыкновенно въ предѣлахъ переходныхъ участковъ или даже совершенно можно пренебрегать, ограничиваясь, такимъ образомъ, при разсмотрѣніи случаевъ быстрого измѣненія обстоятельствъ движенія лишь потерями на "ударъ".

1. Случай внезапнаго увеличенія скорости (теорема Борда).

При разсмотрѣніи этого вопроса съ вѣдомымъ Bélanger *) пользуются закономъ измѣненія количества движенія, примененнымъ къ находящемуся въ установившемся движеніи потоку жидкости.

фиг. 57.



Въ потокѣ (фиг. 57) имѣются отсѣки жидкости между двумя живыми сѣченіями AB и CD. Разсмотримъ элементарное перемѣненіе отсѣка въ теченіе бесконечно малаго промежутка времени Δt изъ положенія ABCD въ положеніе A'B'C'D'; очевидно, объемы ABA'B' и CDC'D' равны между собой и равны каждый самъ по себѣ $Q \Delta t$.

Примѣнимъ законъ измѣненія количества движенія къ отсѣку на разсматриваемомъ перемѣненіи. Такъ какъ движеніе установившееся, то измѣненіе количества движенія отсѣка равно разности количествъ движенія въ объемахъ CDC'D' и ABA'B', т.е. равно разности $\int Q \Delta t \alpha U_2$ и $\int Q \Delta t \alpha U_1$ **); при этомъ векторъ, изображающій направленіе количества движенія, совпадаетъ съ направленіемъ среднихъ скоростей U_1 и U_2 .

На основаніи закона измѣненія количества движенія имѣемъ, что проекція на какое нибудь направленіе измѣненія количе-

*) Знаменитый французскій инженеръ и профессоръ Ecole de ponts et chaussées. Приведенное здѣсь разсмотрѣніе дано имъ съ 40-хъ годовъ въ лекціяхъ, читанныхъ въ названной выше школѣ.

**) Въ этихъ выраженіяхъ коэфф. α означаетъ неоднородность скорости въ сѣченіяхъ. См. выше стр. 58.

ства движенія системы за некоторый промежуток времени равна импульсу за то же время проекцій на выбранное направление действующих на систему внешних сил^{*}).

В применении к нашему отсѣку, выбирая направление $n-n$ имѣемъ:

$$\frac{V}{g} Q \Delta t (\alpha U_2 \cos(U_2, n) - \alpha U_1 \cos(U_1, n)) = \sum F_i \cos(F_i, n) \Delta t,$$

где $\sum F_i$ обозначаетъ сумму всѣхъ действующихъ на отсѣкъ внешнихъ силъ, т.е. давленій въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій, а также реакцій стѣнокъ и силъ тренія на нихъ.

Для установившагося движенія, для котораго величины расхода, скорости и действующихъ силъ не мѣняются по времени, имѣемъ

$$\frac{V}{g} Q [\alpha U_2 \cos(U_2, n) - \alpha U_1 \cos(U_1, n)] = \sum F_i \cos(F_i, n).$$

Величины $\frac{V}{g} Q \alpha U_2$ и $\frac{V}{g} Q \alpha U_1$ представляютъ собой количества движенія, заключенныя въ вытекающей и втекающей въ отсѣкъ въ единицу времени массѣ жидкости.

Разность проекцій этихъ величинъ непосредственно равна суммѣ проекцій действующихъ на отсѣкъ внешнихъ силъ.

Примѣняя выведенное къ случаю внезапнаго расширенія сѣченія имѣемъ для орто-о (ф. 68) мѣтленіе количества движенія въ единицу времени:

$$\frac{V}{g} Q \Delta t (\alpha_2 U_2 - \alpha_1 U_1).$$

При составленіи импульса силъ пренебрегаемъ, какъ сравнительно малыми, силами тренія струй о стѣнки.

Такимъ образомъ, въ выраженіе импульса войдутъ лишь равнодействующія давленій на площадку $a-a$ ат сѣченія C , на площадку $d-d$ въ сѣченіи D , равныя соответственно $F_1 p_1$ и $F_2 p_2$ и, наконецъ, равнодействующая давленій на кольцевую поверхность $a-b$, которую приравниваемъ

$$(F_2 - F_1) p'_1$$

гдѣ p'_1 есть некоторое среднее давленіе на эту поверхность.

^{*}) Очевидно, что импульсы сжимающихъ силъ, какъ попарно равныхъ и противоположныхъ, уничтожаются.

Уравнение изменения количества движения приметъ видъ:

$$\frac{\gamma}{g} Q (\alpha_0 U_2 - \alpha_0 U_1) = (F_1 p_1 + (F_2 - F_1) p'_1 - F_2 p_2) \quad (\alpha)$$

Все затруднение, очевидно, въ опредѣленіи давленія p'_1 ; Bélanger въ своемъ выводѣ предполагаетъ, что среднее давленіе p'_1 равно p_1 , давленію въ центрѣ тяжести струи $\alpha-\alpha$. Это предположеніе равносильно тому, что давленіе по всему сѣченію $C-C$ распространяется по гидростатическому закону, т.е. не только въ предѣлахъ струи $\alpha-\alpha$, гдѣ это благодаря параллелизму струй совершенно вѣрно, но также и въ предѣлахъ $\alpha-\beta$, т.е.

фиг. 36.

кольцевой поверхности, граничащей съ вихревымъ вѣскомъ (K).

Если принять предположеніе Bélanger'a, то изъ ур-ія (α) непосредственно слѣдуетъ, замѣняя $Q = F_1 U_1$ и считая $\alpha_0 = 1$.

$$\frac{U_1^2}{g} \left(1 - \frac{U_2}{U_1}\right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Удельная энергія
въ сѣченіи $D-D$

$$E_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{U_1^2}{2g} + \frac{2U_1 U_2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g};$$

Такимъ образомъ потеря энергіи (потеря напора) при ударѣ,

$$h_{\text{удар}} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Это и есть такъ называемая теорема Borda*), называемая по имени французскаго ученаго, впервые нашедшаго соотношеніе (37).

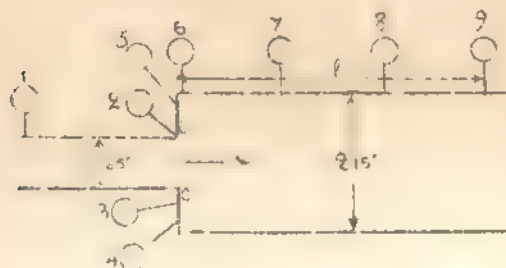
Соотношеніе (37) въ общемъ достаточно удовлетворительно оправдывается опытомъ. Ясно отсюда, что и предположеніе Bélanger'a

*) "Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases par M. le chevalier de Borda (Hist. de l'Ac.R. de Science 1786).

гидрог'а должно въ общемъ быть правильнымъ.

Gibson въ своемъ курсѣ гидравлики приводитъ данныя опы-
товъ въ трубахъ, размеры которыхъ приведены на фиг. 89.

фиг. 89.



(Таблица изъ Gibson'a приведена на стр. 113).

Три этомъ помѣненія въ таблицѣ значенія p' вычисляются
какъ среднія арифметическія изъ показателей пьезометровъ 3,
4 и 5. Какъ видимъ въ опытахъ Gibson'a расхождение теоріи
съ опытомъ увеличивается съ увеличеніемъ скоростей.

Намъ представляется, что причиной этого явленія можетъ
быть отчасти недостаточность разстоянія l между сѣченіями 8-
и 9-го манометровъ; возможно, что въ сѣченіи 9 еще не успѣ-
вало установиться параллельное движеніе. Однако, тотъ фактъ,
что съ увеличеніемъ скоростей возрастаетъ также и расхождение
величинъ p и p' указываетъ, что совпаденія теоріи съ опытомъ
здесь быть не должно, что потери напора должны быть на са-
момъ дѣлѣ больше, чѣмъ слѣдуетъ по формулѣ Borda.

Вобщемъ говоря, въ приведенномъ выше выводѣ Bélanger са-
мымъ слабымъ мѣстомъ является несомнѣнно именно предположе-
ніе относительно распредѣленія давленій по кольцевой по-
верхности $a-b$.

Желательно поэтому вовсе избегатьъ необходимости такъ или
иначе учитывать величину этого давленія.

Самъ Borda получилъ соотношеніе (37), непосредственно
примѣняя къ пьезометрич. явленію найденныя незадолго передъ
тѣмъ Гейгенсомъ теоремы о потерѣ живой силы при ударѣ не-
упругихъ тѣлъ.

По Borda, масса жидкости, вытекающая изъ трубы А съ ско-
ростью u , нагоняетъ двигающуюся болѣе медленно жидкость

Т а б л и ц а

(Gibson. "Hydraulics and its applications". Стр. 84, 1908 г. London).

число	СКОРОСТЬ в фут. табл. в сек.		Давление по манометру в фут.						$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$	$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$	потеря напора из-за трения	вычисл. потеря напора $\frac{(V-V')^2}{2g}$	отклон. действ. потер. нап. к вычисл.
	V	V'	(1)	(2)-p	p'	(7)	(8)	(9)-P					
1.	0,262	2,97	0,670	0,655	0,650	0,353	-	0,675	0,783	0,676	0,107	0,1059	1,011
2.	0,382	4,195	0,10	2,078	2,070	2,083	2,108	2,120	2,351	2,118	0,230	0,226	1,051
3.	0,549	6,01	0,675	0,640	0,622	0,645	0,710	0,719	1,203	0,720	0,483	0,465	1,041
4.	0,8235	9,02	1,480	1,425	1,373	1,440	1,570	1,580	2,690	1,587	1,103	1,041	1,000
5.	1,111	12,19	2,735	2,605	2,545	2,630	-	2,880	4,915	2,199	2,016	1,096	1,058
6.	1,386	15,20	1,04	1,09	0,962	1,07	1,463	1,490	4,682	1,519	3,163	2,975	1,064
7.	1,657	18,18	1,08	0,885	0,702	-	1,395	1,425	6,015	1,468	4,547	4,250	1,063
8.	2,185	23,85	1,440	1,170	0,855	1,12	2,04	2,08	10,05	2,154	7,926	7,350	1,08
9.	2,532	27,80	1,750	1,455	1,055	-	2,470	2,535	13,465	2,625	10,930	9,940	1,091
10.	2,841	31,20	2,15	1,21	1,235	-	2,99	2,04	16,980	3,066	13,864	12,43	1,10

ят трубы В со скоростью u_2 и ударившись продолжаетъ далѣе двигаться съ нею вмѣстѣ, не разъединяясь, съ общей скоростью u_2 , поскобко тому, что происходитъ при свободномъ ударѣ неупругихъ шаровъ, или вообще двухъ неупругихъ тѣлъ.

Хотя результатъ, къ которому пришелъ Borda вѣренъ, однако, его выводъ скорѣе блестящая аналогія, чѣмъ результатъ строго-механическаго умозрѣнія. Жидкости по существу вовсе не неупруги и прилагать къ рассматриваемому случаю непосредственно теорію удара свободныхъ неупругихъ тѣлъ не представляется возможнымъ.

Вопросъ становится совершенно иначе, если разбираемый случай рассматривать съ точки зрѣнія теоріи неупругаго удара, какъ послѣдняя рассматривается вообще въ динамикѣ системы, и если въ частности воспользоваться для опредѣленія потерь такъ называемой теоремой Карно.

Неупругимъ ударомъ въ динамикѣ системы начинается быстрое (почти мгновенное) наложеніе на систему оставшихся связей. Связельные элементы системы могутъ состоять изъ тѣлъ упругихъ либо неупругихъ. Это безразлично. Необходимо лишь, чтобы внезапно введенныя въ систему связи сохранялись, не уничтожались. Тѣмъ самымъ послѣ неупругаго удара движенія системы подчиняются новымъ связямъ, т.е. возможны перемѣщенія системы уже иныя, соответствующія новымъ связямъ, чѣмъ они раньше до удара.

При упругомъ ударѣ этотъ "первый" періодъ внезапнаго наложенія связей сопровождается "вторымъ" періодомъ столь же быстрого полнаго ихъ разрушенія; такимъ образомъ, по окончаніи этого періода возможны перемѣщенія системы тѣ же, что и до удара. В.Л.Кирпичевъ*) предлагаетъ называть "первый" періодъ (наложеніе связей) просто "ударомъ"; второй - разрушеніе связей - "взрывомъ". Такимъ образомъ въ "упругомъ ударѣ" ударъ сопровождается взрывомъ; въ неупругомъ ударѣ взрыва нѣтъ, явленіе ограничивается лишь "ударомъ".

Въ неупругомъ ударѣ величина живой силы, потерянной системой, опредѣляется по такъ называемой теоремѣ Карно. Согласно послѣдней, величина живой силы, потерянная системой, равна живой силѣ, соответствующей потерянными скоростямъ, т.е. раз-

*) "Взетомъ о механикѣ". Стр. 320.

на живой силѣ, которую имѣла бы система, если бы каждая точка ея обладала той скоростью, которую она въ результатѣ удара потеряла.

Эта общая теорема даетъ возможность, хотя бы приближенно, рѣшать весьма много вопросовъ въ гидравликѣ. Особенно важно ея примѣненіе въ теоріи гидравлическихъ ротационныхъ машинъ (турбинъ, центробѣжныхъ насосовъ и т. д.).

Въ примѣненіи къ рассматриваемому случаю теорема Карно непосредственно приводитъ къ теоремѣ Борда.

Дѣйствительно, въ нашемъ случаѣ уравненіемъ связи служить ур-ніе непрерывности, въ силу котораго скорость въ трубѣ В, при полномъ ея загроможденіи, должна имѣть величину

$$U_2 = \frac{Q}{\omega_2} = U_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

При переходѣ изъ сѣченія CC въ DD предполагается связь, въ силу которой скорость должна быстро упасть съ U_1 до U_2 . Потерянная скорость:

$$U_1 - U_2.$$

Живая сила, соответствующая потерянной скорости, отнесенная къ единицѣ вѣса:

$$h_w = \frac{1}{2g} (U_1 - U_2)^2,$$

т. е. выражете (87)

36. Мѣстные потери. Коэффициентъ сопротивленія Weissbach'a.

Какъ мы видѣли выше, въ случаѣ внезапнаго расширенія сѣченія теорема Карно даетъ результаты, оправдываемые опытомъ. Къ сожалѣнію это почти единственный случай, когда умозрительными соображеніями удастся сколько-нибудь удовлетворительно опредѣлить величину потерь. Обыкновенно потери, происходящія при быстрыхъ измѣненіяхъ конфигураціи, потери, которыя въ гидравликѣ принято характеризовать опредѣленіемъ "мѣстныхъ", приходится учитывать посредствомъ тѣхъ или иныхъ эмпирическихъ формулъ. При этомъ большую роль играютъ понятіе о такъ называемомъ коэффициентѣ сопротивленія, введенномъ еще въ 40-хъ годахъ прошлаго столѣтія Weissbach'омъ.

Суть дѣла заключается въ слѣдующемъ. Такъ какъ въ оснѣ-

рядочномъ движеніи сопротивленія пропорціональны примѣрно квадрату скорости, то потери удѣльной энергии на отѣкѣ АВ потока, въ которомъ нарушено медленноизмѣняющееся движеніе, можно выразить въ функціи отъ кинетической энергіи $\frac{u^2}{2g}$. При этомъ потери можно отнести либо къ скорости U_1 , либо къ U_2 . Такимъ образомъ потери напора h_w на участкѣ АВ — можно выразить

$$h_{w,ab} = Z_m \frac{u_1^2}{2g} = Z_m \frac{u_2^2}{2g} \quad (38)$$

гдѣ Z абстрактное число.

Коэффициентъ Z и есть коэффициентъ сопротивленія Weissbach'a. Очевидно, такимъ коэффициентомъ можно характеризовать не только "мѣстныя потери".

Такъ, напримѣръ, для случая прямой цилиндрической трубы длины L и діаметра d , коэффициентъ сопротивленія

$$Z = \lambda \frac{L}{d}$$

Для случая внезапнаго расширенія, переписывая (37) соответственно

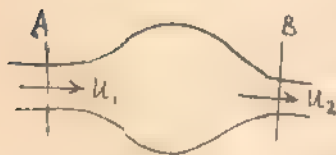
$$h_w = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g} \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2 = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$$

имѣемъ:

$$Z_m = \left(\frac{F_2 - F_1}{F_1}\right)^2; \quad Z_n = \left(\frac{F_2 - F_1}{F_2}\right)^2.$$

Въ справочныхъ книжкахъ приводятся значенія коэффициентовъ Z для различнаго рода мѣстныхъ потерь, какъ, напримѣръ, для случая (фиг. 66) внезапнаго измѣненія направленія трубы, закругленій, водопроводныхъ клапановъ, задвижекъ и пр.

Нѣкоторые изъ этихъ коэффициентовъ мы воспроизведемъ во
фиг. 70.



II-ой ч. курса. Слѣдуетъ лишь, что къ большинству такихъ коэффициентовъ въ справочникахъ надлежитъ относиться съ осторожностью. Обычно не приводятся совершенно данныхъ объ условіяхъ опыта и размѣрахъ испытанныхъ расположеній. Очень часто приводятся коэффициенты, полученные еще самими Weissbachомъ изъ сравнительно неболь-

ного числа опытовъ.

При этомъ вопросъ о томъ, насколько эти формулы сошл и насколько по общему построению онѣ отвѣчаютъ тому или ир-му явлению, часто даже не подвергается разсмотрѣнію.

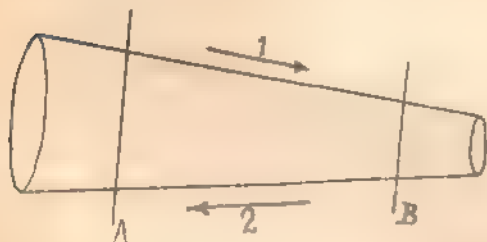
Область изученія явленія мѣстныхъ потерь поэтому надо въ общемъ считать почти не изслѣдованной, и здѣсь имѣетъ еще обширное поле дѣятельности, какъ для чисто эксперименталь-наго опредѣленія коэффициентовъ, такъ и для изученія всего явленія въ дѣломъ.

37. Потери въ расходящемся и сходящемся

потокамъ.

Разсмотримъ еще вопросъ о потеряхъ въ сходящемся и рас-ходящемся потокахъ. Дѣло въ томъ, что если опредѣлять потерю напора, скажемъ, между сѣченіями А и В при движеніи снѣга направо (въ сходящемся потоки) и справа налево (въ расходя-щемся потоки), то, какъ показываютъ опытъ, потери эти бу-дутъ далеко не одинаковы. Снѣ будутъ именно много больше въ случаѣ расходящагося потока.

Фиг. 71.



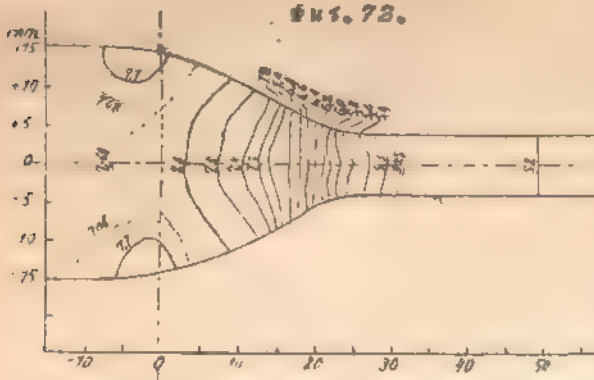
Уже Reynolds отмѣ-тилъ, что расходящія-ся стѣнки (divergent boundaries) увеличива-ютъ "степень беспоря-лочности", сходящія-ся-наоборотъ. Расхо-дящіяся стѣнки умень-шаютъ "устойчивость" движенія, благодаря

чему величина критической скорости соответственно понижается по сравненію съ цилиндрической трубой; обратно, при сходя-щихся стѣнкахъ движеніе изъ струйчатого переходитъ въ без-порядочное при значительно болѣе высокіхъ скоростяхъ, чѣмъ въ ци-линдрической трубѣ, величина критической скорости повышается.

Mitschke *) въ своихъ опытахъ надъ движеніемъ жидкостей въ суживающихся, а затѣмъ расширяющихся каналахъ

*) Mitteilungen über Forschungsergebnisse. Heft. 114. Ber-lin. 1912.

(одинъ изъ опытныхъ каналовъ приведенъ на фиг.72) показали, что въ головной суживающейся части распределе́ние давлений весьма близко совпадаетъ съ тѣмъ, которое соответствуетъ по-



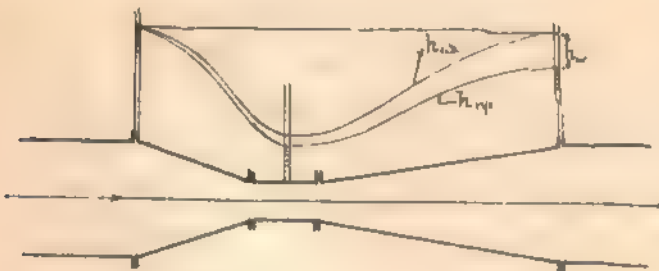
тенциальному движенію.

Такимъ образомъ здѣсь вліяніе силъ сопротивле- нія незначительно, и по- слѣднія не нарушаютъ су- щественно картины движе- нія, получаемой въ пред- положеніи жидкости иде- альной. Наоборотъ, въ рас-

ширяющейся части, благодаря усиленной турбуленціи, картина дви- жения резко разнится отъ соответствующей потенциальной.

Потери въ расходящемся потокѣ увеличиваются по мѣрѣ уве- личенія угла расходимости. Это и служитъ причиной того, поче- му, напримѣръ, въ водомѣрѣ Вентури сужающаяся часть дѣлается короткой, тогда какъ расходящійся конусъ дѣлается по возмож- ности длиннымъ съ малымъ угломъ расходимости. Въ первой части (фиг.73) потери невелики; потенциальная энергія переходитъ

фиг. 73.



почти полностью въ кинетическую; на- оборотъ, въ расхо- дящейся части даже при пологихъ кону- сахъ восстановле- ніе кинетической энергіи въ потен- циальную совершает- ся съ значительны- ми потерями.

Интересные опыты въ этомъ направленіи произвелъ К. Andres^{*}.

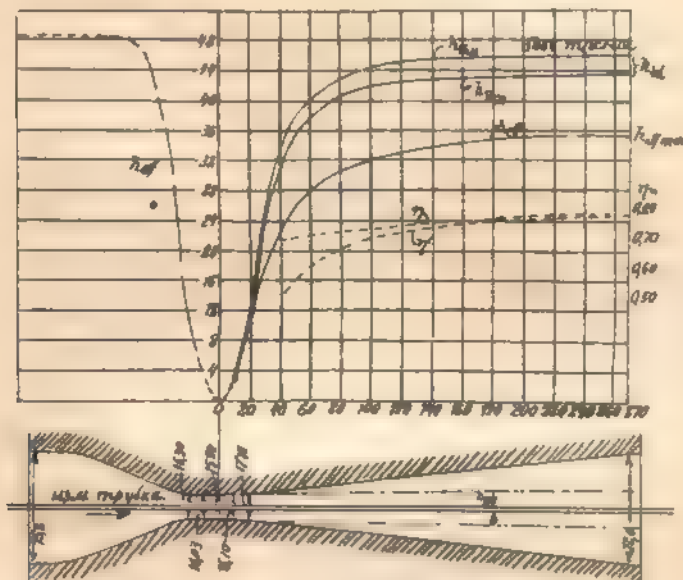
Послѣдній передвигалъ черезъ движущуюся въ соплахъ жидкость (одинъ изъ опыт. Andres см. ф.74) соединенную съ ма- нометромъ тоненькую трубочку съ отверстіемъ; устанавливая по- слѣднюю въ томъ или иномъ сѣченіи, можно было измѣрять вели- чину давленія въ различныхъ сѣченіяхъ потока.

Одна изъ полученныхъ имъ діаграмъ изображена на фиг.74.

^{*}) Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft. 76.

Кривая h_{ef} изображает полученную из опыта кривую давлений. $h_{th(1)}$, $h_{th(2)}$ представляют собой кривые давлений, вычисленные по уравнению Бернулли, первая - не принимая во внимание никаких потерь, 2-ая - считая потери на нормальные от трения по формуле равномерного движения. Кривая $\eta = \frac{h_{ef}}{\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}}$ есть т. назв. коэффициент восстановления, т.е. отношение действительной потенциальной энергии в сечении к теоретической, т.е. к той, которая имела бы место, если бы потерь вовсе не было.

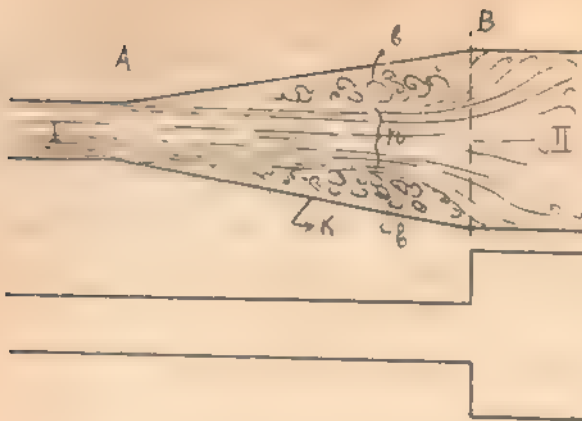
Фиг. 74.



В приведенном примѣрѣ коэффициентъ восстановления сравнительно высокъ, около 0,77; въ случаѣ болѣе рѣзко расходящагося русла коэффициентъ этотъ падаетъ иногда до 0,52 (см. Andreev Табл. стр. 33).

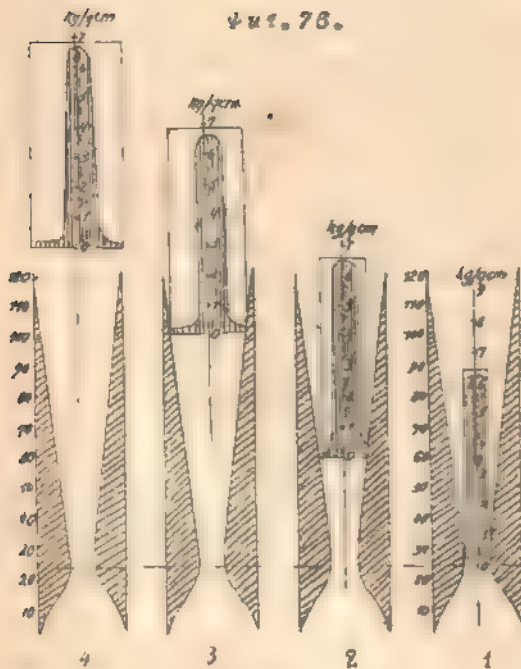
Величина потерь, какъ было выше указано, въ расходящихся потокахъ возрастаетъ съ угломъ расхождения; при этомъ уже при сравнительно не слишкомъ большомъ углу потеря почти что до стигаетъ величины, опредѣляемой по теоремѣ Борда; т.е. коническая вставка между труб. I и II какъ будто уже не оказываетъ влияния; явление протекаетъ такъ, какъ если бы трубы соединялись непосредственно, какъ изображено на фиг. 75. Очевидно, надо предполагать, что въ этомъ случаѣ при движеніи

Фиг. 75.



въ расходящейся части K не имѣть мѣста непрерывное заполненіе конической части движущимся потокомъ. По-видимому, движущійся потокъ (n), отдѣляясь отъ стѣнокъ вихревымъ вѣхромъ b и b въ сѣченіи B ударяется о медленно движущуюся жидкость въ трубѣ II .

Фиг. 76.



На фиг. 76, заимствованной изъ упомянутой выше работы Носцшсшльда изображено распре- дѣленіе полной

$$\text{энергіи} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right)$$

въ различныхъ сѣ- ченіяхъ расширя- щагося канала. Въ виду того, что, какъ показали предвари- тельные опыты, да- вленія въ одномъ и томъ же сѣченіи ма- ло разнятся другъ

отъ друга, кривая на фиг. 76 въ общемъ изображаетъ распре- дѣленіе скоростей. Указанное выше предположеніе объ отдѣленіи потока отъ стѣнки и образованіи вихревого вѣхра подтверждает- ся этими опытами. Особенно интересна діаграмма (4), изобража- ющая распредѣленіе скоростей уже за предѣлами расширяющейся части, въ цилиндрической трубѣ, какъ видимъ и здѣсь скорости

далеко еще не выравнивались, и струя продолжает течь въ середи-
нѣ трубы, отдѣленная отъ стѣнокъ пространствомъ, наполненнымъ
водоворотами.

Въ настоящее время гидравлика не располагаетъ еще доста-
точнымъ количествомъ опытовъ, которые позволяли бы точно заклю-
чить, при какихъ условіяхъ (углахъ расхожденія и скоростяхъ)
происходитъ отдѣленіе струи отъ стѣнки и движеніе струи съ
поверхностями раздѣла окаймленной вихревыми мѣтками. Есть кое
какія основанія предполагать, что съ увеличеніемъ скорости
уголъ, при которомъ происходитъ отдѣленіе, уменьшается. Что ка-
сается величины угла, то судя по всему онъ невеликъ и при ма-
лыхъ скоростяхъ близокъ къ 10° .

То обстоятельство, что возстановленіе кинетической энер-
гій въ потенціальную сопровождается значительными потерями и
не происходитъ въ совершенной формѣ, даетъ намъ, между про-
чимъ, очень простое объясненіе той разницы, которая наблюдается
въ отдачахъ гидравлическихъ двигателей и центробѣжныхъ насосовъ.

Тогда какъ турбины строятся въ настоящее время настолько
совершенно, что достигаются порой коэффиціенты полезнаго дѣй-
ствія значительно выше 0,85, а отдача 0,8 - 0,85 считается
уже почти обычной, въ турбинныхъ насосахъ при самой тща-
тельной конструкціи и лучшей постройкѣ коэффиціентъ полезнаго дѣй-
ствія значительно ниже. Отдачу 0,6-0,7 надо считать нормаль-
ной. Болѣе высокіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія получаются
рѣдко и при исключительныхъ условіяхъ.

Обстоятельство это объясняется, по нашему мнѣнію, тѣмъ, что
въ турбинахъ на всемъ протяженіи движенія воды до выхода изъ
рабочаго колеса имѣется переходъ потенціальной энергій въ ки-
нетическую, совершаемый, какъ выше было указано почти безъ по-
тери. Наоборотъ, въ турбинномъ (центробѣжномъ) насосѣ имѣетъ мѣ-
сто все время переходъ кинетической энергій въ потенціальную.
Связанная съ послѣднимъ неизбежность значительнаго разсѣянія
энергій и ведетъ къ тому, что при всѣхъ прочихъ равныхъ усло-
віяхъ двигатель всегда будетъ совершеннѣе и лучше работать,
чѣмъ насосъ.

Хотя фактъ увеличенія потерь въ расходящемся потокѣ былъ
извѣстенъ уже давно*), тѣмъ не менѣе къ обстоятельному изуче-

*) См., напримеръ, во II-ой части опыта Francis'a (60 г.) и
Fliegner'a (1875 г.) надъ истеченіемъ черезъ конические расхо-
дящіяся насадки.

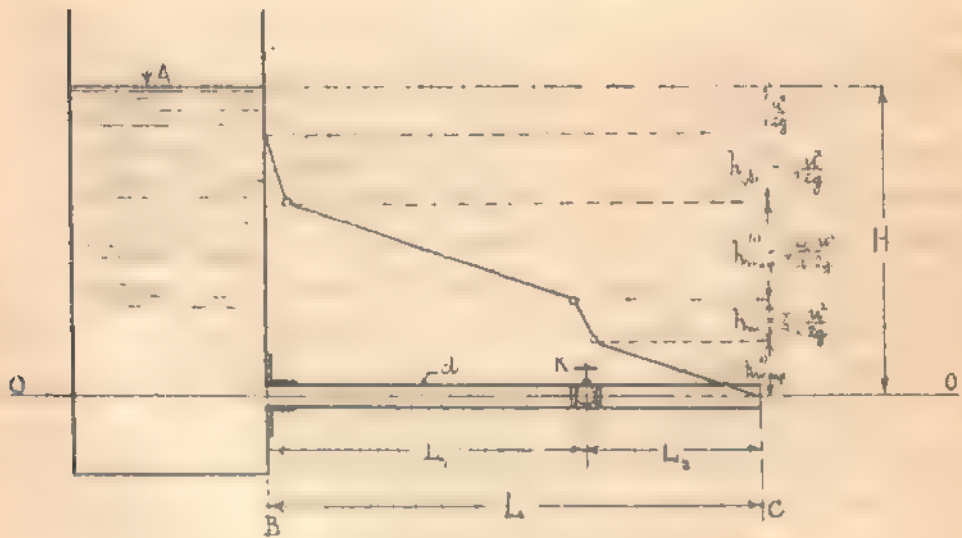
нію цього вопроса приступили въ самое послѣднее время въ связи съ тѣмъ значеніемъ, которое имѣетъ "возстановленіе кинетической энергіи" въ турбинныхъ насосахъ и пр.

38. Практическія приложенія уравненія Бернулли.

Принципъ наложенія потерь.

Найѣтимъ теперь обшій путь рѣшенія различного рода практическихъ вопросовъ, исходя изъ ур-вія Бернулли и пользуясь для выраженія сопротивленія выводомъ и соображеніями послѣднихъ параграфовъ. Бсего лучше это сдѣлать разборомъ ряда отдѣльныхъ случаевъ.

Числ 77.



I. Истеченіе воды изъ бака А черезъ трубу длиною $L = 100$ мтр, діаметромъ $d = 10$ см., вдѣланную за-подѣ-липо въ стѣнѣ бака. Въ трубѣ устроенъ водопроводный клапанъ К. Уровень воды въ бакѣ постоянный. Напоръ (превышеніе свободнаго уровня воды въ бакѣ надъ центромъ трубы въ сѣченіи В), $H = 10$ метровъ.

Взявъ ось 0 - 0 за плоскость сравненія, напишемъ уравненіе Бернулли для свободной поверхности А и выходнаго сѣченія трубы С.

Составляя уравненіе имѣемъ:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{U_a^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \sum h_w.$$

Въ этомъ выраженіи $\frac{p_a}{\gamma}$ — одинаковыя въ сѣченіяхъ А и С давленія, равныя атмосферному, U_a — средняя скорость въ сѣченіи А, величина, благодаря значительнымъ размахамъ сѣченія, малая; U есть скорость въ трубѣ, такимъ образомъ, имѣемъ:

$$H = \frac{U^2}{2g} + \sum h_w.$$

При опредѣленіи $\sum h_w$ придется считаться со слѣдующими отдѣльными потерями:

1) Потеря при входѣ въ трубу, обусловливаемая тѣмъ, что (фиг. 78) входя, струя сначала суживается, а затѣмъ расширяется до полного сѣченія трубы, причемъ при расширеніи и происходитъ потеря энергіи. Величина этой потери на входѣ:

$$h_{w_k} = \zeta, \frac{U^2}{2g},$$

гдѣ для случая, изображеннаго на фиг. 78 $\zeta = 0.5$ (см. 2-ю часть)
фиг. 78.

2) Потери на прямыхъ участкахъ цилиндрическихъ трубъ длинъ L_1 и L_2 , равныя согласно (36)



$$h_{w_{тр}} = \lambda \frac{L_1}{d} \frac{U^2}{2g} \quad \text{и} \quad h_{w_{тр}} = \lambda \frac{L_2}{d} \frac{U^2}{2g}$$

Примемъ, по Darcy, для новыхъ трубъ

$$\lambda = 0.02 \left(1 + \frac{1}{40\delta}\right) = 0.025 = \frac{1}{40},$$

3) Потеря въ водопроводномъ клапанѣ, равная

$$h_{w_k} = \zeta, \frac{U^2}{2g}$$

Возьмемъ ζ для водопроводнаго клапана = 7 *).

При рѣшеніи вопросовъ, подобныхъ поставленному, дѣлають по почину французскихъ гидравликовъ начала XIX стол., предположеніе, что отдѣльныя потери просто складываются, т.е. что общая потеря на опредѣленномъ потокѣ, обусловленная совокупнымъ дѣйствіемъ всѣхъ сопротивленій вмѣстѣ взятыхъ, равна суммѣ отдѣльн. потерь; такой приемъ "наложенія потерь", съ да-

*) Б. А. Вахметевъ и М. В. Кирпичевъ. О сопротивленіи водопроводныхъ клапановъ. Изв. СДБ. К. И. 1908 г. м. X.

маго начала введенный въ гидравлику безъ особаго разсмотрѣнія его допустимости и поддерживаемый традиціей, на самомъ дѣлѣ несомнѣнно неправиленъ. Дѣйствительно, хотя бы для разсматриваемаго случая потери въ прямыхъ трубахъ берутся съ коэффициентомъ, соответствующимъ установившемуся, равномерному движенію, движенію съ опредѣленной картиной распредѣленія скоростей и съ обусловливаемой таковой беспорядочностью движенія.

Ясно, что, напримѣръ, непосредственно за входнымъ въ трубу участкомъ или послѣ клапана нормальное распредѣленіе скоростей нарушено. Беспорядочность движенія отлична отъ нормальной, соответствующей равномерному установившемуся движенію; очевидно, отличны и сопротивленія.

Въ настоящее время, однако, гидравлика не располагаетъ ни опытнымъ ни теоретическимъ матеріаломъ, достаточнымъ для учета подоснаго рода неправильностей. Поэтому волей не волей, за неимѣніемъ лучшаго, мы принуждены пользоваться правиломъ наложения потерь, имѣющимъ огромное достоинство простоты и гибкости въ приложеніяхъ.

Къ тому же обратимъ вниманіе на то, что въ наиболѣе важныхъ практическихъ случаяхъ приходится имѣть дѣло съ длинными линіями трубопроводовъ, каналовъ и пр.; въ этомъ случаѣ вліяніе такихъ отклоненій и неправильностей незначительно.

Возвращаясь къ разсматриваемому случаю, составимъ величину $\sum h_w = H_w$; потерянный напоръ

$$H_w = h_{w_{\text{вх}}} + h_{w_{\text{тр.}}} + h_{w_{\text{изл}}} + h_{w_{\text{пр}}} = \frac{U^2}{2g} \left(Z_1 + \lambda \frac{L}{d} + Z_2 + \lambda \frac{L}{d} \right) = Z \frac{U^2}{2g}$$

Величина Z является суммой отдѣльныхъ коэффициентовъ сопротивленій; мы будемъ называть его общимъ коэффициентомъ сопротивленія системы.

Численно онъ равенъ

$$Z = 0.5 + \frac{100}{40 \cdot 0.01} + 7 = 32.5.$$

Общее уравненіе:

$$H = \frac{U^2}{2g} + Z \frac{U^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} (1 + Z)$$

пнезаметрической высотой (пнезаметр Π_2) - 6 метров. Спне-
ния сосудов велики, такъ что скоростями на свободныхъ по-
верхностяхъ пренебрегаемъ.

Размѣры и длина трубъ ясны изъ черт. Труба 1 соединяется
съ сосудомъ А плавной переходной частью, уменьшающей потери
при входѣ до минимума. Въ сѣченіи В -внезапное расширение при
перемѣнѣ діаметра трубъ. Въ С труба непосредственно примыка-
етъ къ плоской стѣнкѣ бака.

Составимъ уравненіе Вернулли для сѣченій А и В

За плоскость сравненія примемъ плоскость О - О, совпадаю-
щую съ свободной поверхностью А ; имѣемъ:

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_g + \frac{p_B}{\gamma} + \sum h_w ;$$

вычитая изъ обѣихъ частей ур-нія по $\frac{p_a}{\gamma}$ гдѣ p_a атмосфер-
ное давленіе получаемъ

$$\frac{p_A - p_a}{\gamma} = H_g - \frac{p_a - p_B}{\gamma} + \sum h_w$$

$$h_1 = H_g - h_2 + \sum h_w$$

$$\sum h_w = h_1 - (H_g - h_2) = H = 4.5 \text{ мѣ.} \quad (12)$$

гдѣ, Н величина полного напора есть непосредственно разность
уровней въ пнезаметрахъ 1 и 2.

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ весь напоръ тратится
на сопротивленія; послѣднія состоятъ изъ.

1) Пртери на входъ въ трубу; благодаря закругленіости
входной части

$$h_{\text{вх}} = Z_1 \frac{U^2}{2g} ; Z = \sim 0.05.$$

2) Потери на треніе въ трубѣ 1

$$h_{\text{тр.1}} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{40} \cdot \frac{20}{0.1} \cdot \frac{U_1^2}{2g} = 5 \cdot \frac{U_1^2}{2g}$$

3) Додавочной потери на закругленіе

$$h_{\text{закр}} = Z_{\text{закр}} \frac{U_1^2}{2g} , \text{ гдѣ } Z \text{ около } 0.15 - 0.20^*)$$

*) см. II часть.

4) потери на ударъ (по Borda) въ сѣченіи b

$$h_{w\varphi} = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 = \frac{U_2^2}{2g} (4 - 1)^2 = 9 \frac{U_2^2}{2g};$$

5) потери на треніе во второй трубѣ (по Darcy)

$$h_{wmp_2} = 0,023 \frac{40}{0,2} \cdot \frac{U_2^2}{2g} = 4,6 \frac{U_2^2}{2g};$$

6) потери на закругленіе во второй трубѣ

$$h_{wzkr} = Z_{zkr} \frac{U_2^2}{2g}$$

7) потери на выходъ изъ второй трубы въ бакъ В

По теоремѣ Борда непосредственно имѣемъ

$$h_{w\text{вых}} = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2g},$$

гдѣ U_1 скорость воды въ бакѣ. Такъ какъ послѣдняя равна нулю, то потеря

$$h_{w\text{вых}} = \frac{U_2^2}{2g}$$

т.е. теряется вся энергія, соответствующая скорости.

Такимъ образомъ

$$\begin{aligned} \sum h_w &= \frac{U_2^2}{2g} (0,05 + 5 + 0,2) + \frac{U_2^2}{2g} (9 + 4,6 + 0,2 + 1) = \\ &= 5,25 \frac{U_2^2}{2g} + 14,8 \frac{U_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

Относя все къ U_2 , имѣемъ, принимая во вниманіе, что

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$$

$$\sum h_w = 5,25 \frac{U_2^2}{2g} \cdot 16 + 14,8 \frac{U_2^2}{2g} = 99 \frac{U_2^2}{2g}.$$

Подставляя въ (а) имѣемъ

$$H = 45 \text{ м.} = 99 \frac{U_2^2}{2g}; \quad U_2 = \sqrt{2g \frac{45}{99}} = 0,93 \text{ м/сек.}$$

III. Опредѣлимъ еще вакуумъ во всасывающей трубѣ насоса (фиг. 80) въ точкѣ А при слѣдующихъ данныхъ:

Полная длина трубы $L = 20$ метр.; диаметръ $d = 20$ см.

$Q = 60$ литр./сек.; $h_n = 4,5$ м.

Труба снабжена предохранительной сѣткой \mathcal{C} и обратнымъ клапаномъ; общее сопротивленіе ихъ одѣливаемъ коэффициентомъ $Z = 5$.

Предполагая, что движеніе установившееся (центробѣжный насосъ), примѣняемъ уравненіе Бернулли къ сѣченіямъ $O-O$ (поверхность воды въ колодезѣ); пренебрегая скоростью въ $O-O$ и называя давленіе въ $A-P_x$, напомнимъ

$$\frac{p_a}{\gamma} = h_n + \frac{p_x}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \sum h_w$$

Такимъ образомъ искомый вакуумъ

$$V_{ac} = \frac{p_a - p_x}{\gamma} = h_n + \frac{U^2}{2g} + Z_c \frac{U^2}{2g}.$$

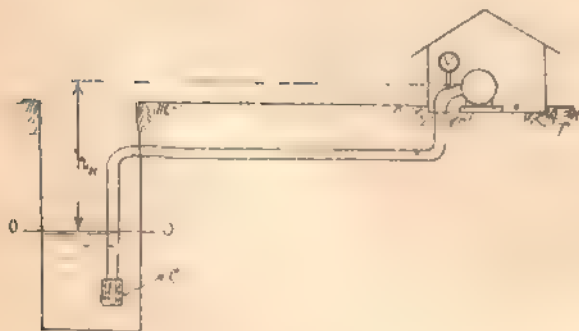
Оцѣнивая сопротивленія въ трехъ колѣнахъ величинахъ $Z = 3 \times 0.2 = 0.6$ беря $\lambda = \frac{1}{30}$ имѣемъ

$$Z_c = 5 + \frac{1}{30} \frac{20}{0.2} + 0.6 = 8.93 \approx 9,$$

$$U = \frac{0.0600}{0.0314} = 1.91 \text{ м}; \quad \frac{U^2}{2g} = 0.19 \text{ м}$$

$$V_{ac} = 4.5 + 0.19 \times 10 = 6.4 \text{ м.}$$

рис. 80.



Вакуумъ быстро увеличивается съ расходомъ. Такъ, напримеръ, если бы Q было равно $90 \frac{\text{литр}}{\text{с.}}$, скорость одѣлалась бы равной ≈ 2.9 и $\frac{U^2}{2g} = 0.42$.

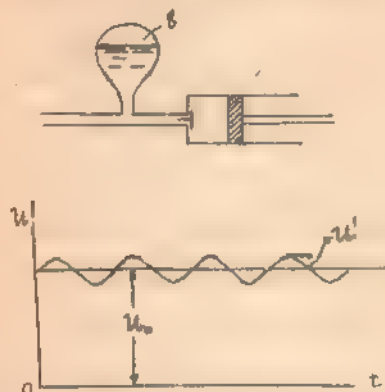
Вакуумъ былъ бы равенъ $4.5 + 4.2 = 8.7$;

очевидно, такая степень разрѣженія практически была бы недопустима и насосъ работалъ бы неудовлетворительно.

Примѣръ этотъ ясно обнаруживаетъ вліяніе на вакуумъ сопротивленій во всасывающей трубѣ и ясно указываетъ, насколько необходимы соответственные подсчеты при установкѣ насосовъ.

Предположимъ теперь, что вѣсто центробѣжнаго установленна насосъ поршневой, дѣлающій $n = 120$ оборотовъ въ минуту. Благодаря этому, движеніе въ трубѣ будетъ неустановившимся, переменнымъ. Колебанія скорости воды въ трубѣ смягчаются присутствіемъ воздушнаго колпака b , но полнаго уничтоженія колебаній скорости, очевидно, нѣтъ.

Fig. 81.



Предположимъ для простоты, что скорость воды въ трубѣ слѣдуетъ соотношенію:

$$u = u_0 (1 + z \sin \omega t),$$

гдѣ $z u_0 = u'$ есть наибольшее отклоненіе скорости отъ средней.

Применимъ къ движенію въ трубѣ ур-ніе неустановившагося движенія (26); очевидно, имѣемъ:

$$\frac{p_a - p_x}{\gamma} = Vac = h_n + \frac{u^2}{2g} + z \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} \int_0^s \omega$$

$$\int_0^s \frac{ds}{\omega} = \frac{L}{\omega} \quad \text{и} \quad Vac = h_n + \frac{u^2}{2g} + z \frac{u^2}{2g} + \frac{L}{g} \cdot \frac{du}{dt}$$

Опредѣлимъ наибольшую величину $\frac{1}{g} \cdot \frac{du}{dt}$, т.е. наибольшее увеличеніе вакуума отъ переменнаго движенія.

Имѣемъ:

$$\frac{du}{dt} = z u_0 \omega \cos \omega t; \quad \text{макс. величина} \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{L}{g} z u_0 \omega;$$

При $n = 120 \text{ об/м} \quad \omega = 4\pi$; принявъ $z = 0.1$, получаемъ

$$\frac{L}{g} z u_0 \omega = \frac{20}{9.81} \cdot 0.1 \cdot 1.91 \cdot 4\pi = 4.9 \text{ мѣ.}$$

Такимъ образомъ наибольшій вакуумъ, если считать сопротивленія въ переменномъ движеніи одинаковыми съ установившимся, получается равнымъ:

$$6'4 + 4'9 = 11'3 \text{ м.}$$

Какъ видно даже въ случаѣ не слишкомъ быстроходнаго насоса и съ сильно смягченными воздушными колпаками колебаніями получается разрывъ непрерывности.

Этимъ и объясняются сопровождаемые сильными сотрясеніями "удары", наблюдаемые при работѣ поршневыхъ насосовъ и трудностями, встречаемыми при проектированіи "быстроходныхъ" поршневыхъ насосовъ.

39. Сопротивленія въ неравномѣрномъ медленно измѣняющемся движеніи.

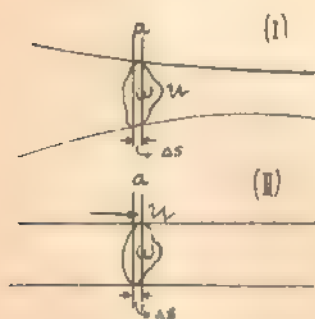
Въ разсмотрѣнныхъ выше случаяхъ сходящагося и расходящагося потоковъ мы предполагали сравнительно быструю сходимостъ и расходимостъ; обратимся теперь къ случаю неравномѣрнаго медленно измѣняющагося движенія, въ которомъ сходимостъ или расходимостъ потока ничтожны.

При учетѣ сопротивленія въ такомъ движеніи (въ неравномѣрномъ и неустановившемся) обычно сравниваютъ потери напора съ тѣми, которыя имѣли бы мѣсто при той же конфигураціи потока въ установившемся и равномѣрномъ движеніи; другими словами величину потери напора

$$\Delta h_w = \frac{dh_w}{ds} \Delta s = - \frac{dE}{ds} \Delta s$$

на промежуткѣ Δs , соответствующемъ сѣченію площади ω , сравниваютъ съ потерей $\Delta h_{w(n)}$, которая имѣла бы мѣсто на томъ же промежуткѣ Δs въ установившемся движеніи по цилиндрической трубѣ (ф. 82 II) того же сѣченія ω .

фиг. 82.



Соответствующія потери въ равномѣрномъ установившемся движеніи будемъ называть "нормальными".

Легко показать, что какъ въ неустановившемся, такъ и въ неравномѣрномъ движеніи потери будутъ больше "нормальныхъ" — въ случаѣ ускореннаго движенія и меньше въ случаѣ замедленнаго.

Начнемъ съ неравномѣрнаго движенія.

Разсмотримъ два смежныхъ сѣ-

точки a и b потока, находящегося въ установившемся неравномерномъ движеніи. Пусть при этомъ движеніе удовлетворяетъ условіямъ медленной измѣняемости. Если пренебrecь сопротивленіями, то разность Δy высотъ пьезометрическихъ высотъ, то для каждой струйки имѣемъ:

$$\Delta \left(\frac{u^2}{2g} \right) = \Delta y$$

или

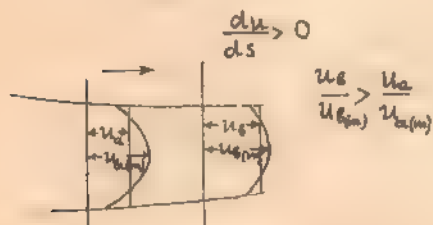
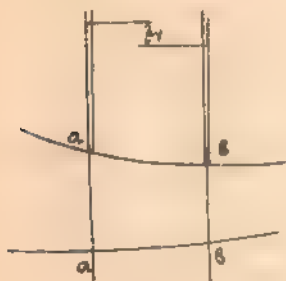
$$\Delta y = \frac{u \Delta u}{g}$$

Откуда

$$\Delta u = \frac{\Delta y \cdot g}{u}$$

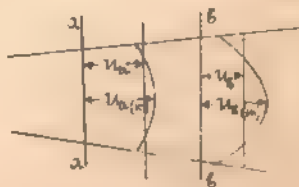
Такимъ образомъ оказывается, что абсолютное измѣненіе скорости струйки обратно пропорціонально величинѣ скорости струйки. Ясно, что наибольшему измѣненію будутъ подвергаться, вообще говоря, меньшія скорости; такимъ образомъ, въ случаѣ ускореннаго движенія $\left[\frac{du}{ds} > 0 \right]$ скорости у стѣнокъ будутъ возрастать на большую величину, чѣмъ скорости въ центрѣ сѣченія. Слѣдовательно скорости вообще стремятся выравниваться (отношеніе $\frac{u}{u_{\max}} = \frac{\text{средн. скорость}}{\text{наибольш. скор.}}$) будетъ возрастать (фиг. 83).

фиг. 83.



Въ замедленномъ движеніи получится обратная картина; скорости у стѣнокъ, какъ, вообще говоря, меньшія подвергнутся наибольшему искаженію и неравномерность распре-

фиг. 84.



дѣленія скоростей по сѣченію увеличится.

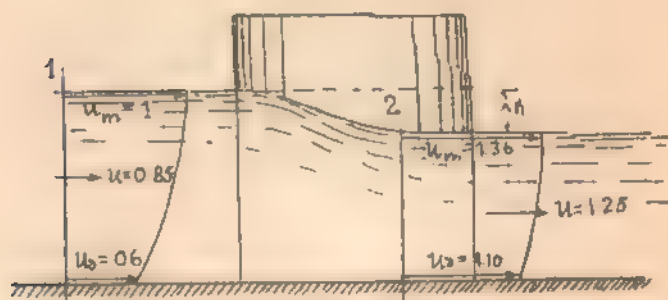
Итакъ, при неравноѣрномъ движеніи всегда имѣетъ мѣсто перераспредѣленіе скоростей по сравненію съ равноѣрнымъ.

Особенно замѣтно такое перераспредѣленіе при сравнительно рѣзкихъ измѣненіяхъ потока. Рассмотримъ, напримѣръ, перераспредѣленіе скоростей при стѣсненіи рѣки искусственными сооруженіями, быками мостовъ, плотинами и пр. Тутъ мы можемъ встрѣтиться съ крайне сильнымъ увеличеніемъ донной скорости.

Для примѣра предположимъ, что русло рѣки стѣснено искусственными сооруженіями настолько, что средняя скорость увеличивается съ 0,85 м/с. до 1,25 м/с. (въ сѣченіяхъ 1 и 2 фиг. 85). Пренебрегая сопротивленіями, вычисляемъ паденіе

$$\Delta h = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(1.25)^2 - (0.85)^2}{2g} = 0.043 \text{ м.т.}$$

фиг. 85.



Если скорости u_{max} на поверхности и u_b по дну въ сѣченіи 1 были соответственно равны 1 м/с. и 0,6 м/с., то въ суженномъ сѣченіи онѣ достигнутъ величинъ:

$$u_{2 \max} = \sqrt{u_{1 \max}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1.84} = 1.36 \text{ м.т.}$$

$$u_{2 \text{ дн.}} = \sqrt{u_{1 \text{ дн.}}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1.20} = 1.10 \text{ м.т.}$$

что составитъ увеличеніе скоростей соответственно на 36%

и на 83,5% при увеличении средней скорости на 47%.

Этот примѣръ наглядно показываетъ, насколько близоручко при расчетѣ различныхъ искусственныхъ сооружений считается лишь съ замѣненіемъ среднихъ скоростей и основываться на данныхъ, получаемыхъ изъ опытовъ съ равномернымъ движеніемъ.

Ясно, напримѣръ, что при суженіи русла донная скорость растётъ острѣе средней, а вѣдь именно величиной донной скорости обуславливается преимущественно размывъ дна.

Очевидно, что при замедленномъ движеніи будетъ имѣть мѣсто обратное явленіе; большее, противъ средней, уменьшеніе донной скорости будетъ создавать болѣе благопріятныя, чѣмъ при равномерномъ движеніи съ той же средней скоростью, условия для отложенія наноса.

Выше мы показали, что сопротивленія отъ тренія обуславливаются прежде всего величиной донной скорости. Такимъ образомъ надо, въ согласіи съ изложеннымъ выше, ожидать, что въ ускоренномъ движеніи сопротивленія будутъ больше, въ замедленномъ меньше нормальныхъ.

Если подобнымъ образомъ легко учесть качественное вліяніе неравномерности движенія на величину сопротивленія, то количественно это представляется въ высшей степени труднымъ.

Бо первыхъ, вызываемому неравномерностью движенія перераспределенію скоростей противодействуютъ силы тренія, стремящіяся въ общемъ вернуть движеніе къ нормальному виду; кромѣ того, не надо упускать изъ виду, что сопротивленія обуславливаются общей степенью беспорядочности движенія, а, какъ мы выше видѣли, увеличенію послѣдней чрезвычайнао благопріятствуетъ расходимость стѣнокъ — и наоборотъ. Эти общія причины дѣйствуютъ такимъ образомъ въ направленіи обратномъ вліянію перераспределенія скоростей и т. д.

Но, что здѣсь, вообще говоря, имѣетъ мѣсто очень сложное явленіе, являющееся слѣдствіемъ взаимодействія цѣлаго ряда факторовъ.

Между тѣмъ, мы имѣемъ до настоящаго времени лишь самое ничтожное число опытовъ въ интересующемъ насъ направленіи, — матеріалъ явно недостаточный для возможности сколько нибудь конкретныхъ рѣшеній.

Вольшею частью поэтому приходится довольствоваться тѣмъ,

что въ медленномъ измѣняющемся движеніи считать сопротивленія одинаковыми съ нормальными.

40. Случай неустановившагося движенія.

Разсмотримъ стѣкъ АВ жидкости, находящейся въ цилиндрической трубѣ въ установившемся равномерномъ движеніи, которому соответствуетъ нормальное распредѣленіе скоростей по сѣченію (bb'). Потеря напора на нормальное сопротивленіе длины ΔS при этомъ равна Δh_н.

Пусть теперь находящейся въ трубѣ жидкости сообщено нѣкоторое ускореніе $\frac{\partial U}{\partial t}$. Благодаря этому, согласно уравненію (26) долженъ будетъ увеличиваться пьезометрическій уклонъ вдоль трубы; разность давленій въ сѣченіяхъ А и В будетъ теперь для каждой струйки

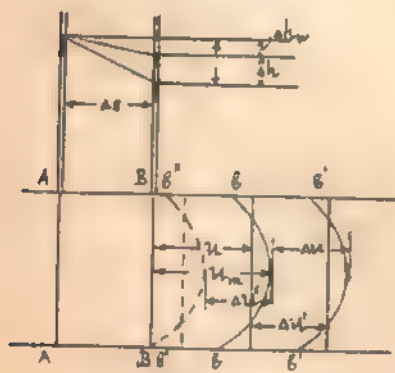
$$\Delta h = \Delta h_n + \Delta h_i = \Delta h_n + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Delta s$$

Измѣненіе скорости каждой струйки въ теченіе элемента времени Δt

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t = \frac{\Delta h_i}{\Delta s} g \Delta t = i g \Delta t;$$

Такимъ образомъ, измѣненіе скоростей всѣхъ струекъ одинаково; кривая скоростей просто передвинется въправо въ положеніе bb' при положительн. ΔU т.е. при ускоренномъ по времени движеніи или влево въ положеніе b''b' при отрицательномъ ΔU т.е. при замедленномъ движеніи.

Фиг. 88.



Слѣдовательно, въ неустановившемся, переменномъ по времени движеніи скорости "выравниваются" при ускоренномъ движеніи; и наоборотъ, въ замедленномъ движеніи неодинаковость скоростей относительно увеличивается.

Въ согласіи со сказаннымъ

въ предыдущемъ параграфѣ мы имѣемъ въ первомъ случаѣ увеличеніе, во второмъ— уменьшеніе сопротивленій противъ нормальныхъ.

Однако, подобно тому, какъ и въ неравномѣрномъ движеніи, количественный учетъ этихъ измѣненій большою частью представляется пока невозможнымъ. Если движеніе измѣняется по времени очень медленно, можно и въ случаѣ перемѣняющагося движенія считать сопротивленія одинаковыми съ нормальными. Оказывается также возможнымъ оцѣнить, хотя бы приблизительно, потери въ случаѣ быстрыхъ колебаній въ трубѣ *).

*) См. Введеніе въ изученіе неуставовищагося движенія (изд. 1918 г.).

